Matemática para Ciências

Volume 1: Funções

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha
Pitágoras Pinheiro de Carvalho
Olimpio Pereira de Sá Neto

EDUFDPar

Matemática para Ciências

Volume 1: Funções

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha
Pitágoras Pinheiro de Carvalho
Olimpio Pereira de Sá Neto

EDUFDPar

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha
Pitágoras Pinheiro de Carvalho
Olimpio Pereira de Sá Neto

Matemática para Ciências

Volume 1: Funções

EDUFDPar

MATEMÁTICA PARA CIÊNCIAS
VOLUME 1: FUNÇÕES

1ª edição: 2026

Editoração
Os Autores
Diagramação
Os Autores
Capa
Taiane Maria de Oliveira

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Delta do Parnaíba

U54m Universidade Federal do Delta do Parnaíba
Matemática para ciências – volume 1: funções [recurso eletrônico]. / Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha; Pitágoras Pinheiro de Carvalho; Olimpio Pereira de Sá Neto. – Parnaíba: EDUFDPar, 2026.
Livro digital :il.: color.

ISBN: 978-65-987225-7-9

1. Números reais. 2. Funções. 3. Operações com funções. 4. Universidade. I. Título.

CDD: 510.7

Elaborada por Adriana Luiza de Sousa Varão CRB-3/1493

Prefácio da Coleção Completa

É com grande satisfação que apresentamos a coleção *"Matemática para Ciências"*, composta por três volumes cuidadosamente organizados para oferecer uma formação consistente, clara e acessível em matemática aplicada às Ciências. Esta coleção foi concebida com atenção especial aos estudantes de cursos fora das Ciências Exatas, reconhecendo a matemática como uma ferramenta essencial para o progresso acadêmico e investigativo em suas respectivas áreas.

Reconhecemos que, para muitos leitores, até mesmo conceitos mais básicos da matemática podem se apresentar como um desafio abstrato. Contudo, quando a aprendizagem é conduzida por abordagens adequadas, a matemática se revela acessível e aplicável, permitindo também que sua dimensão estética e seu valor científico sejam plenamente apreciados.

A Estrutura da Coleção:

Cada volume da coleção foi concebido de forma progressiva e complementar, de modo a proporcionar ao leitor um percurso natural de aprendizado

- **Volume 1 – Funções:** Introdução rigorosa aos conceitos fundamentais de funções, abrangendo definições formais, domínios, contradomínios, imagens e propriedades estruturais, constituindo a base conceitual indispensável para o desenvolvimento da matemática aplicada e teórica.

- **Volume 2 – Álgebra Linear e Vetores:** Apresentação sistemática dos conceitos de vetores, matrizes, sistemas lineares e transformações lineares, que estabelecem a estrutura algébrica e geométrica fundamental para a análise de problemas multivariados e para aplicações em diferentes domínios científicos e de engenharia.

- **Volume 3 – Cálculo em uma Variável:** Apresentação rigorosa dos fundamentos do cálculo diferencial e integral em uma variável, abordando limites, continuidade, derivadas e integrais, com ênfase tanto na formalização teórica quanto nas técnicas de cálculo e em suas aplicações à modelagem de fenômenos reais.

Abordagem Didática e Aplicada:

Nos três volumes, adotamos uma apresentação clara, com exemplos contextualizados e exercícios práticos, sempre buscando aproximar a teoria da realidade. Em vez de tratar a matemática apenas como abstração, privilegiamos a sua utilidade como linguagem universal para compreender, descrever e prever fenômenos em contextos científicos, tecnológicos e sociais.

A Quem se Destina:

Esta coleção destina-se a estudantes de Matemática, Ciências Naturais, Biológicas, Sociais Aplicadas e Tecnológicas, bem como a todos que desejam desenvolver uma compreensão sólida e aplicada da matemática. Se você busca um aprendizado consistente, do fundamental às aplicações avançadas, esta obra foi feita para você.

Recursos e Apoio ao Leitor:

Os volumes contam com exercícios, exemplos resolvidos e seções de reforço conceitual, concebidos para apoiar diferentes estilos de aprendizagem. O objetivo é tornar o estudo não apenas possível, mas também prazeroso e enriquecedor.

Sua Jornada Matemática:

Esta coleção foi elaborada para acompanhar o leitor em seu processo de aprendizagem, conduzindo-o gradualmente dos fundamentos introdutórios ao uso de ferramentas matemáticas de maior complexidade, que poderão integrar-se de forma natural à sua formação acadêmica e à sua prática profissional.

Espera-se que o material aqui apresentado contribua para o fortalecimento da compreensão conceitual, para o desenvolvimento da confiança no uso da matemática e para o incentivo à exploração de suas aplicações e potencialidades.

Boa jornada matemática!

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha
Pitágoras Pinheiro de Carvalho
Olimpio Pereira de Sá Neto

Resumo do Volume 1

O Volume 1 – Funções, da coleção Matemática para Ciências, apresenta uma introdução sólida e acessível aos conceitos fundamentais de funções, que constituem a base da matemática aplicada. Com abordagem clara e didática, este volume explora o universo das funções, suas propriedades, classificações e aplicações, proporcionando ao leitor tanto a compreensão teórica quanto a perspectiva prática de seu uso na modelagem matemática.

O livro inicia apresentando o conceito de função, enfatizando sua importância na descrição de relações matemáticas e fenômenos do mundo real. São abordados tópicos como domínio, imagem, funções elementares, compostas e inversas, com exemplos que mostram como essas ideias se conectam com problemas concretos em Ciências, Engenharia, Economia e Biologia.

Além da fundamentação teórica, o volume dedica atenção especial à interpretação gráfica das funções, possibilitando ao leitor a visualização das relações, a identificação de tendências e a compreensão do comportamento funcional em diferentes contextos. Funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas são analisadas detalhadamente, evidenciando suas aplicações práticas e seu papel como alicerce para conceitos mais avançados, que serão abordados nos volumes subsequentes da coleção.

Exercícios e exemplos contextualizados e seções de reforço conceitual ajudam a consolidar o aprendizado, tornando o estudo mais interativo e efetivo. O objetivo é que o leitor não apenas memorize conceitos, mas desenvolva intuição e habilidade para aplicar funções em situações variadas.

Em resumo, este volume oferece uma introdução completa e envolvente ao mundo das funções, preparando o terreno para o estudo de Álgebra Linear, Cálculo e Equações Diferenciais nos volumes posteriores. É uma obra indispensável para estudantes e profissionais que buscam construir uma base matemática sólida e aplicada, essencial para compreender e modelar fenômenos científicos de maneira eficaz.

Por fim, destaca-se que todas as figuras apresentadas neste volume foram elaboradas com o pacote TikZ do LaTeX, contando com o apoio de ferramentas de Inteligência Artificial para sua concepção e refinamento.

Agradecimentos

Agradecimentos 1

A elaboração desta coleção representou um percurso ao mesmo tempo desafiador e profundamente enriquecedor. Cada página foi escrita com o propósito de tornar a Matemática mais clara e acessível a estudantes de diferentes áreas do conhecimento.

Registro meu sincero agradecimento ao Prof. Olimpio Pereira de Sá Neto pelo convite para integrar este projeto, cuja relevância para o ensino da Matemática em contextos diversos considero indiscutível.

Sou especialmente grato à minha esposa, Carla Oliveira, pela paciência, compreensão e incentivo constantes, que me permitiram dedicar o tempo e a energia necessários à construção desta obra. Ao meu filho, Matheus Oliveira Cunha, agradeço pela inspiração diária, lembrando-me sempre do valor da curiosidade, da perseverança e da alegria no aprendizado. Espero que esta coleção possa, no futuro, também contribuir para sua própria caminhada acadêmica.

Por fim, estendo minha gratidão a todos que, de forma direta ou indireta, colaboraram para a realização deste trabalho. Que ele possa cumprir seu propósito maior: apoiar, inspirar e fortalecer a jornada daqueles que veem na Matemática não apenas um desafio, mas também uma ferramenta essencial para compreender e transformar o mundo.

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Agradecimentos 2

Expresso minha profunda gratidão aos meus pais José Raimundo de Carvalho e Maria Roci Guedes de Carvalho, cujo amor, dedicação e exemplo constante moldaram completamente minha trajetória de vida pessoal e acadêmica. O apoio, presença e incentivo foram fundamentais para que eu pudesse alcançar meus sonhos e dedicar-me à ciência e à educação com confiança.

Dedico este livro à minha filha Alícia Erhart, cuja descoberta dos primeiros passos na matemática desperta em mim, todos os dias, inspiração e entusiasmo como educador. Espero que a curiosidade e a ludicidade com que exploramos juntos o conhecimento matemático básico iluminem sempre seu aprendizado e sua trajetória de vida.

Pitágoras Pinheiro de Carvalho

Agradecimentos 3

Quero expressar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para a realização desta obra, mas especialmente aos que foram fundamentais em minha jornada.

Aos meus pais, José Raimundo Lima Ferro *(in memoriam)* e Sara Silva Sá Ferro, que foram fontes inesgotáveis de apoio, sabedoria e inspiração. Mesmo na ausência física de meu pai, sua presença espiritual continua a me guiar. Agradeço por todos os valores e lições que moldaram meu caráter e influenciaram diretamente a criação deste trabalho.

Aos meus filhos, Maria Rita Serena Cerqueira de Sá e José Luiz Olímpio Cerqueira de Sá, que são a razão pela qual busco ser cada vez melhor como homem e espírito. Suas presenças são a fonte constante de força e energia que impulsionam minha jornada. Este trabalho é dedicado a vocês, como uma expressão de gratidão e amor profundo.

A minha esposa Rita de Cássia Cerqueira Viana por toda convivencia e evolução compartilhada.

Registro meu sincero agradecimento ao Prof. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha e Pitágoras Pinheiro de Carvalho pelo aceite para integrar este desafio na elaboração desta obra.

Que esta obra, permeada de gratidão e dedicação, possa contribuir de alguma forma para o enriquecimento intelectual de todos aqueles que a lerem.

Olimpio Pereira de Sá Neto

Sumário

Lista de Figuras

CAPÍTULO 1

Números e Funções

1.1 Números Reais

O conceito de número surgiu da necessidade humana de contar e medir elementos do cotidiano. Inicialmente, isso era feito de forma prática e intuitiva, com o uso de marcas, símbolos e objetos simples. Com o tempo, surgiram os números naturais e os primeiros sistemas de numeração, como o sexagesimal dos babilônios e o decimal dos egípcios. No entanto, o entendimento formal do que é um número só começou a ser desenvolvido no século XIX, quando matemáticos como Cauchy, Cantor, Grassmann, Dedekind e Peano passaram a buscar uma fundamentação lógica para os conceitos matemáticos, transformando a matemática em uma ciência mais rigorosa. Nesse sentido, o **sistema numérico usual** consiste essencialmente em um conjunto, cujos elementos são chamados de **números reais**, e em duas operações denominadas **adição** $(+)$ e **multiplicação** $(\cdot)$. A seguir aprofunda-se um pouco nas características e propriedades de tais números.

Seguindo o roteiro histórico acima os primeiros números que conhecemos são os chamados números naturais $(\mathbb{N})$, seguindo com os números inteiros $(\mathbb{Z})$, os números racionais $(\mathbb{Q})$ e os números reais $(\mathbb{R})$.

O conjunto dos números naturais é formado pelos números associados ao processo de contagem, ou seja,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\},$$

onde cada $n \in \mathbb{N}$, com $n \neq 1$, pode ser obtido a partir de 1 ("um") tomando-se o seu sucessor, ou seja, $n = p + 1$, para algum $p \in \mathbb{N}$.

O conjunto dos números inteiros consiste na união do conjunto dos números naturais, dos seus respectivos simétricos aditivos $(-n)$, e do zero (0),

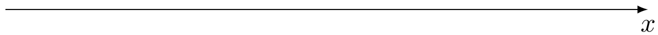
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Aqui surge a noção de números positivos ("à direita do zero") e negativos ("à esquerda do zero"), bem como a operação de **subtração**: $a - b = a + (-b)$.

Os números positivos e negativos estão relacionados com a representação geométrica de $\mathbb{Z}$ conforme apresentado a seguir.

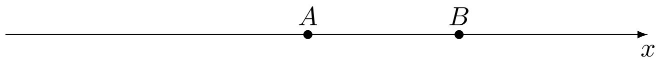
Uma reta x é orientada quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso dito positivo (ver Figura 1.1). O sentido oposto é denominado negativo.

Figura 1.1: Reta orientada para direita (usual).



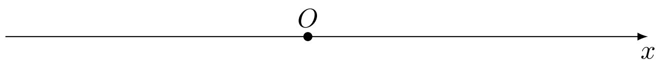
Sejam A e B pontos na reta orientada x. Dizemos que B está à direita de A (ou que A está à esquerda de B) quando o sentido de percurso de A para B coincide com o sentido positivo escolhido na reta x.

Figura 1.2: Sentido de percurso de A para B.



Um eixo é uma reta orientada na qual é fixado um ponto O, chamado origem.

Figura 1.3: Eixo x.



Dessa forma, dado um eixo x a origem O faz-se corresponder o número zero e a cada ponto A do eixo (à direita ou à esquerda de O), corresponde um único número inteiro a, chamado de coordenada do ponto A no eixo x.

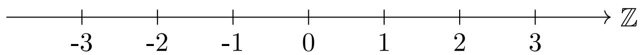
Definição 1.1. Seja $a \in \mathbb{Z}$ e $A \in x$ seu respectivo ponto sobre o eixo x. Dizemos que a é **positivo**, denotando por $a > 0$, se A está a direita da origem. Do mesmo modo, diz-se que a é **negativo**, denotando por $a < 0$, se A está a esquerda da origem.

O símbolo $<$ é denominado "é menor do que" e o símbolo $>$ é denominado "é maior do que".

Definição 1.2. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e A, B seus respectivos pontos sobre o eixo x. Diz-se que $a < b$ em $\mathbb{Z}$ se A está à esquerda de B.

Tal relação define uma ordem estrita em $\mathbb{Z}$ e formaliza a interpretação geométrica abaixo.

Figura 1.4: Números inteiros.



A ordem estrita definida acima pode ser caracterizada como segue

$$a < b \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow a - b < 0,$$

ou

$$a < b \Leftrightarrow \text{existe } c > 0 \text{ tal que } b = a + c.$$

Definição 1.3. Dados $a,\ b \in \mathbb{Z}$, diz-se que $a \leq b$ se $a < b$ ou $a = b$.

Com respeito a relação $\leq$ destacamos três fatos importantes:

- Se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$, para todo $c \in \mathbb{Z}$.
- Se $a \leq b$ então $ac \leq bc$, para todo $c \in \mathbb{Z}$ com $c > 0$.
- Se $a \leq b$ então $bc \leq ac$, para todo $c \in \mathbb{Z}$, com $c < 0$.

Observação 1.1. Convenciona-se que $\alpha < \beta < \gamma$ abrevia $\alpha < \beta$ **e** $\beta < \gamma$. Do mesmo modo, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ significa $\alpha \leq \beta$ **e** $\beta \leq \gamma$ e $\alpha \leq \beta < \gamma$ significa $\alpha \leq \beta$ **e** $\beta < \gamma$.

Por sua vez, o conjunto dos números racionais consiste nas chamadas **frações**, associadas a medições e formadas a partir da **operação de divisão** entre dois números inteiros m e n, com $n \neq 0$. Tal operação é definida por $m \div n = m \cdot n^{-1}$, onde n^{-1} representa o simétrico multiplicativo ou inverso de n. A existência de n^{-1} é a essência do conjunto $\mathbb{Q}$. Por simplicidade, denota-se $m \div n = \dfrac{m}{n} = m/n$ e $n^{-1} = \dfrac{1}{n}$. Dessa forma tem-se

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq} \ (n \neq 0, q \neq 0),$$

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq-np}{nq} \ (n \neq 0, q \neq 0),$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} \quad (n \neq 0, q \neq 0),$$

$$\frac{m/n}{p/q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} \ (n \neq 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0).$$

Na fração $\dfrac{m}{n}$, com $n \neq 0$, o inteiro m é dito **numerador** e o inteiro não nulo n é dito **denominador** da fração.

Note que a "construção" acima garante que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Além disso, $\mathbb{Q}$ munido das operações acima possui as propriedades seguintes:

(A1) **Associativa**: $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$;

(A2) **Comutativa**: $a + b = b + a$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$;

(A3) **Elemento neutro**: $a + 0 = 0 + a = a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$;

(A4) **Elemento simétrico**: para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe $a^* \in \mathbb{Q}$, tal que $a + a^* = a^* + a = 0$. Nesse caso, tem-se $a^* = -a$;

(M1) **Associativa**: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$;

(M2) **Comutativa**: $a \cdot b = b \cdot a$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$;

(M3) **Elemento neutro**: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$;

(M4) **Elemento inverso**: para todo $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, existe $a^\dagger \in \mathbb{Q}$, tal que $a \cdot a^\dagger = a^\dagger \cdot a = 1$. Nesse caso, tem-se $a^\dagger = \dfrac{1}{a}$;

(D) **Distributiva**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$,

das quais seguem as demais propriedades algébricas.

Exemplo 1.1.1. Uma importante aplicação das propriedades acima, é o processo usual de multiplicação entre dois números. Para fixar ideia, considere a multiplicação abaixo

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 11 \\ \hline 23 \\ +23 \\ \hline 253 \end{array}$$

Formalmente temos:

$$\begin{aligned} 23 \cdot 11 &= 23 \cdot (1 \cdot 10 + 1) \\ &= 23 \cdot 1 \cdot 10 + 23 \cdot 1 \\ &= 23 \cdot 10 + 23 \\ &= 230 + 23 \\ &= 253. \end{aligned}$$

Assim, transladar 23 para esquerda na conta organizada verticalmente, equivale a escrever $23 \cdot 10$.

A relação de ordem apresentada acima para os números inteiros continua valendo para os números racionais com a adição de novas propriedades. Em especial, vale para $a = m/n$, $b = p/q \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq \leq np.$$

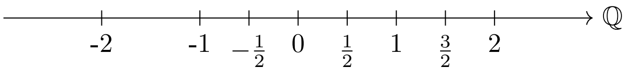
Assim, os números racionais constituem um **conjunto ordenado**, isto é, para cada par de números $a, b \in \mathbb{Q}$, uma e somente uma das relações abaixo ocorre

$$a < b, \ a = b, \ a > b.$$

Tal resultado é denomidado **lei da tricotomia**. Temos então uma representação geométrica análoga para o conjunto dos números racionais conforme a Figura 1.5.

Assim, por sucessivas ampliações do conceito de número chegou-se ao conjunto ordenado $\mathbb{Q}$, o qual estão bem definidas as quatro operações básicas da aritmética e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Com isso

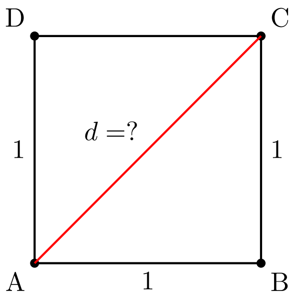
Figura 1.5: Números racionais



pensou-se que o conjunto $\mathbb{Q}$ supria completamente os problemas envolvendo contagens e/ou medições. No entanto isso não ocorreu. Coube à escola pitagórica a descoberta de um segmento cuja medida não estava associada a um número racional.

Exemplo 1.1.2. Não existe $d \in \mathbb{Q}$ que represente o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1. Ou seja, em vista do Teorema de Pitágoras, da relação de divisibilidade e argumento de redução ao absurdo, não existe um número $d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = 2$. Portanto, $d \notin \mathbb{Q}$.

Figura 1.6: Diagonal com medida não racional.



Exemplo 1.1.3. Também não existe $C \in \mathbb{Q}$ que represente o comprimento de uma circunferência de raio $r \in \mathbb{Q}$.

Dessa forma, entende-se como o conjunto dos números reais o conjunto

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c,$$

onde $\mathbb{Q}^c$ representa o conjunto dos **números irracionais**. Nesse novo conjunto, o número d dado no Exemplo 1.1.2 representa a raiz quadrada de 2, sendo caracterizado pela identidade

$$d = \sqrt{2} \Leftrightarrow d^2 = 2.$$

Em geral, para cada número real $\alpha > 0$ e $n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$, existe um único $\beta > 0$ tal que $\beta^n = \alpha$. Assim, define-se

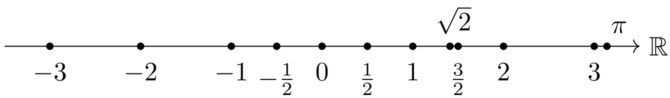
$$\beta = \sqrt[n]{\alpha} \Leftrightarrow \beta^n = \alpha.$$

Além disso, um número irracional é caracterizado como um número real que não pode ser representado na forma de fração.

Exemplo 1.1.4. Os exemplos mais conhecidos de números irracionais são: $\pi \approx 3,14159$ ("pi"), $e \approx 2,71828$ (número de Euler), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{p}$ onde $p \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito.

Em $\mathbb{R}$ são bem definidas as quatro operações básicas: $+$, $-$, $\cdot$ e $\div$, bem como as relações de ordem $<$, $>$, $\leq$ e $\geq$ destacadas acima. Além disso, são satisfeitas todas as propriedades mencionadas anteriormente. Nesse contexto, a representação geométrica de $\mathbb{R}$ é dita **reta real**.

Figura 1.7: Reta real.



Observação 1.2. À medida que a matemática foi se desenvolvendo, surgiram situações em que os números naturais, inteiros e até os reais já não eram suficientes para resolver certos problemas. Um exemplo clássico é a equação $x^2 + 1 = 0$, que não possui solução no conjunto dos números reais. Para lidar com esse tipo de questão, os matemáticos introduziram uma nova ideia: os números complexos ($\mathbb{C}$). Os números complexos estendem os números reais ao incluir uma unidade imaginária, representada por i, onde $i^2 = -1$. Um número complexo tem a forma $a + bi$, onde a e b são números reais. Embora inicialmente tenham sido vistos com desconfiança por parecerem "números fictícios", os complexos provaram ser extremamente úteis em diversas áreas da ciência e engenharia, como na eletricidade, na mecânica quântica e no processamento de sinais.

Com o tempo, a busca por representar e manipular fenômenos ainda mais complexos levou à criação dos *quatérnios*, desenvolvidos por William Rowan Hamilton em 1843. Os quatérnios podem ser vistos como uma generalização dos números complexos, formados por quatro componentes:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

onde i, j e k são unidades imaginárias que obedecem a regras específicas de multiplicação, como $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $4ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$.

Ao contrário dos números reais e complexos, os quatérnios **não obedecem à comutatividade na multiplicação**, ou seja, a ordem dos fatores altera o produto. Ainda assim, eles se mostraram extremamente poderosos, especialmente na representação de rotações no espaço tridimensional. Por isso, são amplamente usados em computação gráfica, robótica, aviação e realidade virtual. Os números complexos e os quatérnios mostram que os conceitos numéricos não são fixos, mas sim construções que evoluem conforme surgem novas necessidades matemáticas, científicas e tecnológicas. Cada nova ampliação do conceito de número representou um passo importante na consolidação da Matemática como uma ferramenta para descrever e compreender o mundo.

Àlgebra Básica

Considerando as propriedades algébricas satisfeitas pelos números reais apresentadas acima, vale destacar a aplicação correta das mesmas, em especial a propriedade distributiva. Em relação a tal propriedade é usual em Matemática a expressão "colocar o fator comum em evidência", o que nada mais é do que aplicar a distributividade da multiplicação em relação a adição:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Na expressão acima, a é dito o *fator comum* às duas parcelas e, assim, pode ser colocado em *evidência.*

Exemplo 1.1.5. Coloque o fator comum em evidência nas expressões abaixo.

1. $3x + 6 = 3x + 3 \cdot 2 = 3(x + 2)$;
2. $3xh + h^2 = h(3x + h)$;
3. $5hx^4 + h^2x + h^4x^2 = hx(5x^3 + h + h^3x)$.

Quando se tratar de uma expressão envolvendo uma fração, somente poderá ser simplificado o fator que seja comum a cada uma das parcelas do numerador e do denominador.

Exemplo 1.1.6. Simplifique a expressão $\dfrac{2x^2 + x}{x^4 + 5x}$.

Solução 1.1.1. De fato,

$$\frac{2x^2 + x}{x^4 + 5x} = \frac{x(2x + 1)}{x(x^3 + 5)} = \frac{2x + 1}{x^3 + 5}.$$

As relações acima são entendidas como **expressões algébricas**, isto é, combinações de *variáveis* (letra ou símbolo que representa um número real a ser determinado), *constantes* (números reais especificados) e as *operações básicas*: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Estas duas últimas serão relembradas mais adiante. Nesse contexto, é de grande valia a aplicação da **regra de sinais**:

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

e

$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b),$$

para todos $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.7. Usando a regra acima tem-se

1. $-12 = -4 \cdot 3 = 4 \cdot (-3)$;
2. $16 = 4 \cdot 4 = (-4) \cdot (-4)$;
3. $-(x+7) = -x - 7$;
4. $-(-x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Além disso, com tal regra é possível ressignificar o símbolo "$-a$" usado para indicar o simétrico aditivo de $a \in \mathbb{R}$. De fato, vale

$$-a = (-1) \cdot a,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Quanto as operações de potenciação e radiciação mencionadas acima, temos as seguintes definições e propriedades:

Definição 1.4. A potência de base $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, e expoente $n \in \mathbb{N}$, é o número real a^n tal que

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a \cdot a^n \end{cases}$$

Dessa definição decorre que

$$a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a,$$

$$a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a,$$

e, em geral,

$$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a \ (n - \text{vezes}).$$

Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$ e a, $b \in \mathbb{R}$ positivos tem-se

(P1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

(P2) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

(P3) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$,

(P4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

A propriedade (P1) é a propriedade mais importante, pois todas as outras decorrem dela e a mesma serve como caracterizaçao para a^n. Além disso, vale que

- $a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots$;

- $0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots$.

Para o caso em que $n \in \mathbb{Z}$, isto é, caso em que n pode ser negativo ou zero, deve ser mantida a propriedade fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Com base nisso, devemos ter $a^0 \cdot a = a^{0+1} = a$. Como $a \neq 0$, segue que

$$a^0 = 1.$$

Do mesmo modo,

$$a^{-n} \cdot a^n = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^1 = a, \\ a^{n+1} = a \cdot a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a \ (n - \text{vezes}), \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}. \end{cases}$$

Temos ainda:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \ \forall \ m, \ n \in \mathbb{Z};$
- $a > 1 \Rightarrow a^{-n} < 1 < a^n, \ n \in \mathbb{N};$
- $0 < a < 1 \Rightarrow a^n < 1 < a^{-n}, \ n \in \mathbb{N};$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \ \forall \ m, \ n \in \mathbb{Z}.$

O caso $r \in \mathbb{Q}$, isto é, $r = \dfrac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, seguimos as mesmas ideias acima:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot ... \cdot a^r = a^{rn} = a^m \Rightarrow a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ou seja,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

definindo assim a **operação de radiciação**. As propriedades acima continuam válidas. Em especial, $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, para todos $r, \ s \in \mathbb{Q}$, e

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b},$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \ b \neq 0,$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a},$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \iff a = b \quad (a, b \geq 0).$$

Exemplo 1.1.8. Algumas potências importantes (*produtos notáveis*):

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2,\\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2,\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.1.9. Com base no exemplo anterior, temos

1. $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$,
2. $(5y-1)^2 = 25y^2 - 10y + 1$,
3. $(x+4)(x-4) = x^2 - 16$,
4. $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Exemplo 1.1.10. $\left(x + \sqrt{2}\right)^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{2} + 6x + 2\sqrt{2}$.

Exemplo 1.1.11. $\left(\sqrt{3} - y\right)^3 = 3\sqrt{3} - 9y + 3\sqrt{3}y^2 - y^3$.

Exemplo 1.1.12. Uma aplicação muito utilizada da noção de potências é a chamada **notação científica**. Tal aplicação consiste em uma forma de escrever números muito grandes ou muito pequenos usando potências de 10 com expoente inteiro. Mais precisamente, um número $\alpha > 0$ em notação científica tem a forma:

$$\alpha = a \cdot 10^n,$$

com $n \in \mathbb{Z}$ e $1 \leq a < 10$. Assim, temos em particular

$$300\,000 = 3 \times 10^5,$$

$$0{,}00042 = 4{,}2 \times 10^{-4},$$

$$(2 \times 10^3) \cdot (3 \times 10^5) = 6 \times 10^8,$$

e

$$\frac{4 \times 10^7}{2 \times 10^3} = 2 \times 10^4.$$

Por fim, no caso de **expoente irracional**, podemos calcular a^n, com $n \in \mathbb{Q}^c$, de forma **aproximada**. A ideia geral é, dados um número real $a > 0$ e um número irracional n, podemos construir por meio de aproximações sucessivas ("por falta e por excesso") de potências de a com expoente racional, um único número real positivo a^n.

Exemplo 1.1.13. Cálculo aproximado de $13^{\sqrt{2}}$. Temos que existem números racionais α_n e β_n, $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$\alpha_n < \sqrt{2} < \beta_n, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Por exemplo:

⋆ Por falta

- $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,4 = \dfrac{14}{10}$,
- $\alpha_3 = 1,41 = \dfrac{141}{100}$,
- $\alpha_4 = 1,414 = \dfrac{1414}{1000}$,
- $\alpha_5 = 1,4142 = \dfrac{14142}{10000}$, ...

⋆ Por excesso

- $\beta_1 = 2$,
- $\beta_2 = 1,5 = \dfrac{15}{10}$,
- $\beta_3 = 1,42 = \dfrac{142}{100}$,
- $\beta_4 = 1,415 = \dfrac{1415}{1000}$,
- $\beta_5 = 1,4143 = \dfrac{14143}{10000}$, ...

Segue que

$$13^{\alpha_n} < 13^{\sqrt{2}} < 13^{\beta_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, podemos definir o valor de $13^{\sqrt{2}}$ via aproximações por falta ou por excesso de potências de base 13 e expoentes racionais da seguinte forma:

⋆ Por falta

- $13^1 = 13$,
- $13^{1,4} = 36,267756667$,
- $13^{1,41} = 37,210039132$,
- $13^{1,414} = 37,59377174$,
- $13^{1,4142} = 37,613061911$, ...

⋆ Por excesso

- $13^2 = 169$,
- $13^{1,5} = 46,872166581$,
- $13^{1,42} = 38,176803296$,
- $13^{1,415} = 37,69032163$,
- $13^{1,4143} = 37,622710708$, ...

Assim, podemos considerar

$$13^{\sqrt{2}} \approx 37,6.$$

Valor Absoluto e Intervalos

A relação de ordem $\leq$ e a propriedade de tricotomia em $\mathbb{R}$ permitem estabelecer a seguinte definição.

Definição 1.5. Seja $x \in \mathbb{R}$. Definimos o valor absoluto (ou módulo) de x como sendo

$$|x| = \begin{cases} x, \; se\, x \geq 0; \\ -x, \; se\, x < 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.1.14. $|6| = 6$ e $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$.

Exemplo 1.1.15. Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $|x| = 4$, então o ponto na reta real cuja coordenada é x dista 4 unidades da origem O, ou seja, $x = 4$ ou $x = -4$. Assim, resolver uma equação da forma $|x| = m$, com $m > 0$, equivale a $x = m$ ou $x = -m$, isto é, o conjunto solução será $S = \{-m,\ m\}$.

Exemplo 1.1.16. Seguindo as ideias do exemplo anterior podemos concluir que

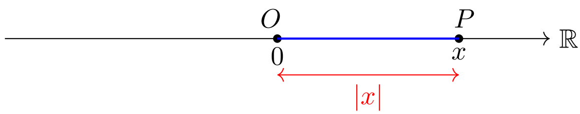
$$|x+4| = 2 \Leftrightarrow x+4 = 2 \text{ ou } x+4 = -2,$$

ou seja,

$$x = -2 \text{ ou } x = -6.$$

Geometricamente $|x|$ pode ser interpretado como sendo a distância do ponto P, correspondente a x, à origem O na reta real, isto é, o comprimento do segmento OP.

Figura 1.8: Interpretação geométrica de $|x|$.



Dado $x \in \mathbb{R}$, decorrem imediatamente da definição de valor absoluto as seguintes propriedades

$$|x| = \max\{x, -x\},$$

$$|x| \geq 0,$$

$$|-x| = |x|$$

e

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

A seguir listamos mais algumas propriedades importantes do valor absoluto de um número real.

Teorema 1.1. Sejam $a,\ b,\ x \in \mathbb{R}$, então

1. $|ab| = |a||b|$.
2. $|a+b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdade Triangular)
3. Se $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, então $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
4. Se $b \in \mathbb{R}$, com $b > 0$, então $|x| \geq b \Leftrightarrow x \leq -b$ ou $x \geq b$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$.

A demonstração do resultado acima segue da definição de valor absoluto e das prooriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$. Vale destacar que as desigualdades em (3.) e (4.) são cruciais na resolução de desigualdades ou inequações.

Exemplo 1.1.17. Considere a desigualdade $|2x+1| \leq 4$. Usando a propriedade 3. acima,

$$|2x+1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 2x+1 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 2x \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Assim, a solução da desigualdade será o conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}.$$

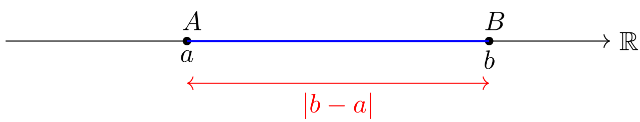
Figura 1.9: Interpretação geométrica do conjunto S.

Observação 1.3. Sejam A e B dois pontos sobre a reta real com coordenadas a e b respectivamente. Então,

$$d(A, B) := |a - b| = |b - a|$$

define a distância (unidimensional) entre A e B.

Figura 1.10: Distância entre A e B.



A relação de ordem em $\mathbb{R}$ determina ainda importantes conceitos e subconjuntos em $\mathbb{R}$, a saber, o conceito de **conjuntos limitados** e de **intervalos**.

Definição 1.6. Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio.Diz-se que X é limitado superiormente se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$. Cada b com essa propriedade é dito uma cota superior de X.

Da mesma forma,

Definição 1.7. Diz-se que X é limitado inferiormente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$. Cada a com essa propriedade é dito uma cota inferior de X.

Definição 1.8. Diz-se que X é limitado se for limitado superior e inferiormente.

Neste último caso, vale $a \leq x \leq b$, para todo $x \in X$. Em termos do valor absoluto, um conjunto ser limitado significa que existe $C \in \mathbb{R}$, com $C > 0$, tal que $|x| \leq C$, para todo $x \in X$.

Exemplo 1.1.18.

1. $X = \left\{ \frac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ é limitado $(a = 0$ e $b = 1)$;

2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente $(a = 1)$, mas não é limitado superiormente.

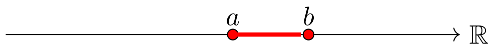
3. $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são ambos não limitados em $\mathbb{R}$;

Definição 1.9. Um *intervalo* é um subconjunto I de $\mathbb{R}$ com a propriedade de que para todos $x, y \in I$, se $z \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq z \leq y$ então $z \in I$.

Conforme a limitação, os intervalos são denotados como segue:

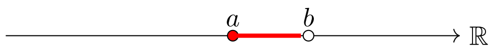
1 - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$.

Figura 1.11: Intervalo fechado e limitado.



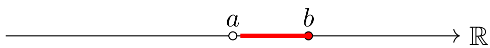
2 - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$.

Figura 1.12: Intervalo (limitado) semiaberto à direita.



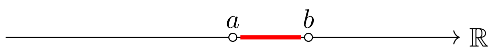
3 - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$.

Figura 1.13: Intervalo (limitado) semiaberto à esquerda.



4 - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.

Figura 1.14: Intervalo aberto e limitado.

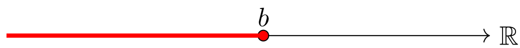


5 - $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$.

Figura 1.15: Intervalo fechado e não limitado superiormente.

6 - $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$.

Figura 1.16: Intervalo fechado e não limitado inferiormente.

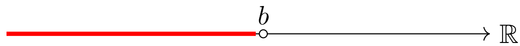


7 - $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$.

Figura 1.17: Intervalo aberto e não limitado superiormente.

8 - $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$.

Figura 1.18: Intervalo aberto e não limitado inferiormente.



9 - $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Figura 1.19: Reta real.

Note que os quatro primeiros intevalos acima são limitados. Os intervalos são usados frequentemente para representar conjuntos-soluções de desigualdades.

Exemplo 1.1.19. Na desigualdade $|2x+1| \leq 4$ resolvida no Exemplo 1.1.17, tem-se $S = \left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

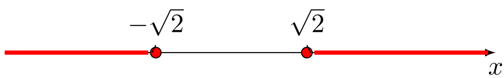
Exemplo 1.1.20. Considere a desigualdade $|x^2-4| \leq 2$. Note que

$$|x^2-4| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x^2-4 \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x^2 \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq |x| \leq \sqrt{6}.$$

O conjunto solução da primeira desigualdade será $S_1 = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq \sqrt{2} \text{ ou } x \leq -\sqrt{2}\}$.

Figura 1.20: Conjunto S_1.



Para o conjunto solução da segunda desigualdade temos $S_2 = \{x \in \mathbb{R};\ -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}\}$.

Figura 1.21: Conjunto S_2.

Note que a desigualdade $\sqrt{2} \leq |x| \leq \sqrt{6}$ nos diz que as duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente. Logo, o conjunto solução é a interseção dos conjuntos S_1 e S_2, isto é, $S = S_1 \cap \ S_2$. Logo,

$$S = \{x \in \mathbb{R}; -\sqrt{6} \leq x \leq -\sqrt{2} \ \ ou \ \ \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{6}\}.$$

Em notação de intervalo segue que

$$S = [-\sqrt{6}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{6}].$$

Figura 1.22: Representação geométrica da solução.

1.2 Funções Reais de Variável Real

O conceito de função, junto com sua representação gráfica, é certamente um dos mais importantes em Matemática e é ferramenta poderosa na modelagem de inúmeros fenômenos. De maneira intuitiva, uma função *relaciona* ou *faz correspondência/transformações entre* dois objetos que podem ter naturezas diferentes, isto é, que podem pertencer a conjuntos distintos, porém com uma certa hierarquia de "saída e chegada", bem como algumas **restrições**. Isso mostra que o conceito de função depende fortemente das noções de par ordenado, produto cartesiano ("hierarquia") e de relação binária ("correspondências ou transformações").

Um par ordenado é um par de objetos cuja ordem em que estão listados tem importância.

Definição 1.10. Dados $A,\ B$ conjuntos não vazios com $a,\ c \in A$ e $b,\ d \in B$, definimos o **par ordenado** $(a,\ b)$ como sendo um terceiro elemento associado ao par $\{a,\ b\}$ de modo que

$$(a,\ b) = (c,\ d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

Tal noção estabelece a como o primeiro e b como segundo elemento na listagem.

Observação 1.4.

1. Em geral $(a,\ b) \neq (b,\ a)$, valendo a igualdade se, e somente se, $a = b$;

2. $(a,\ b) \neq \{a,\ b\}$.

Por sua vez, um produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, é a coleção de todos os possíveis pares ordenados que podemos formar com elementos desses conjuntos.

Definição 1.11. Sejam A e B conjuntos não vazios. Chama-se Produto Cartesiano de A por B ao conjunto

$$A \times B = \{(x,\ y)\ ;\ x \in A\ e\ y \in B\}.$$

Exemplo 1.2.1. Considere $A = \{1,\ 3\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3\}$. Então:

$$A \times B = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\}$$

e

$$B \times A = \{(1,1),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,3)\}.$$

Exemplo 1.2.2. Designamos por $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\ ;\ x,\ y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x,y), onde x e y são números reais.

Na linguagem comum o termo "Relação" significa "conexão ou associação entre objetos". Dessa forma, uma **relação binária** R , ou simplesmente *relação* R, entre os elementos de A e os elementos de B, é uma condição ou um conjunto de condições que permitem determinar, dados $x \in A$ e $y \in B$, se x está ou não se relacionando com y segundo R. Esse conjunto de condições define formalmente um subconjunto $R \subset A \times B$.

A notação usual para manipulação de relações binárias é dada a seguir:

$$xRy \iff (x,\ y) \in R \iff\ x \text{ se relaciona com } y \text{ segundo } R.$$

Exemplo 1.2.3. Sejam A o conjunto de pessoas em uma dada cidade e B o conjunto formado por todos os números de telefone disponíveis para tal cidade. Uma relação imediata entre tais conjuntos é T: "tem como número de telefone". Assim, para $x \in A$ e $y \in B$, $x\ T\ y$ significa que a pessoa x tem como número de telefone y. Note que em tal relação podemos ter pessoas em A que não possui número de telefone (elemento em A que não se relaciona com nenhum elemento de B) e pessoas com mais de um número de telefone também (elemento em A que se relaciona com vários elementos de B).

Exemplo 1.2.4. Considere o mesmo conjunto A do exemplo anterior e, agora, o conjunto C de todos os CPF's válidos registrados na mesma cidade. Considerando a relação S: "tem como CPF", dizer que $x\ S\ z$, com $x \in A$ e $z \in C$, significa que a pessoa x tem como CPF o número z. Cada pessoa tem um único CPF (em teoria), e um CPF só pode estar associado a uma única pessoa.

Exemplo 1.2.5. Considerando uma produção em pequena escala de determinado produto, é assegurado que o custo variável, C_v, da produção é proporcional à quantidade x produzida. Assim, denotando por C_f o custo fixo de produção, temos que o valor de cada produto fica determinado de modo único pela relação $C = C_v \cdot x + C_f$. A relação C é usada em economia para representar o custo para produzir x unidades de um produto.

Exemplo 1.2.6. Seja E o conjunto de todas as retas de um plano α. A relação de paralelismo P é definida por

$$xPy \Leftrightarrow x \text{ coincide com } y \textit{ ou } x \cap y = \emptyset.$$

Na relação de paralelismo substitui-se a notação P por duas barras paralelas $//$. Assim,

$$x \; P \; y \Leftrightarrow x \; // \; y,$$

como é usualmente conhecida na literatura. Nesse caso, também temos retas que não se relacionam (retas concorrentes, por exemplo), e retas se relacionando com várias outras.

A relação binária entendida como função, exige uma correspondência para cada elemento da "saída" com um único elemento na "chegada", como nos Exemplos 1.2.4 e 1.2.5.

Definição 1.12. Dados dois conjuntos A e B, uma função f de A em B é uma relação que associa **cada elemento** $x \in A$ a um **único** $y \in B$.

Note que existe uma dependência do elemento $y \in B$ em relação ao elemento $x \in A$, os quais são denominados *variável dependente* e *variável independente*, respectivamente. Assim, escreve-se $y = f(x)$ em vez de $x \; f \; y$. Em um contexto aplicado, tais variáveis são ditas *grandezas* e podem ser representadas por outras letras.

A exigência de unicidade na definição de função evita ambiguidades e permite a tradução precisa de inúmeros fenômenos para o contexto matemático.

Exemplo 1.2.7. Da Biologia sabe-se que a taxa de fotossíntese depende da intensidade da luz. Mais especificamente, considerando que para baixos níveis de luz, a taxa aumenta quase linearmente e para altos níveis de luz existe saturação, ou seja, a planta não consegue aproveitar mais luz, deduz-se que a função

$$F(I) = \frac{aI}{b+I},$$

relaciona a intensidade luminosa I com a taxa de fotossíntese $F(I)$, onde $a,\ b \in \mathbb{R}$ são constantes que dependem da planta e do ambiente.

Exemplo 1.2.8. Dado um corpo metálico de comprimento inicial L_0 em processo de aquecimento, tem-se experimentalmente que o aumento de comprimento do corpo através do aumento de temperatura ocorre de forma proporcional à variação de temperatura:

$$\Delta L := L_f - L_0 = \alpha L_0 \Delta T,$$

com $L_f = L(T) =$ comprimento a temperatura T. Como a temperatura inicial é $T_0 = 0$, temos

$$L(T) = L_0 + \alpha L_0 T = L_0(1 + \alpha T),$$

para cada $T \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ fixo (constante de proporcionalidade ou coeficiente de dilatação térmica).

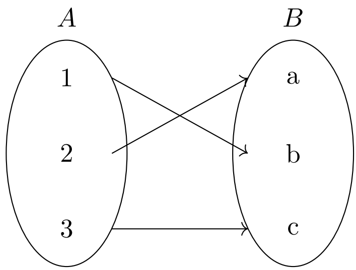
Exemplo 1.2.9. No Exemplo 1.2.5, temos a função $C := C(x) = C_v \cdot x + C_f$ representando o custo para produzir x unidades de um produto (produção em pequena escala).

Uma forma de representar uma função f de A em B é através da notação

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & y = f(x), \end{array}$$

bem como, em casos mais simples, do chamado *Diagrama de Flechas* ou *Diagrama de Venn*.

Figura 1.23: Corresponência entre conjuntos com diagrama de Venn.



Nas representações acima, o conjunto à esquerda representa a "saída" ou **domínio** de f, denotado por $Dom(f)$, e o conjunto à direita representa a "chegada" ou **contradomínio** f. O símbolo "$\longmapsto$" e as flechas indicam como cada elemento do domínio é mapeado para o contradomínio ($y = f(x)$), formando o **conjunto imagem**:

$$Im(f) = \{y \ \in B \ ; \ y = f(x) \text{ para algum } x \in A\} \subset B.$$

Exemplo 1.2.10. Seja X o conjunto dos triângulos de um plano α. Se, a cada $t \in X$ fizermos corresponder o número real $f(t) =$ área de t, obteremos uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Neste caso, $Dom(f) = X$ e $Im(f) = (0, +\infty)$.

Exemplo 1.2.11. A correspondência $id_A : A \longrightarrow A$, que para cada $x \in A$ associa o próprio x, isto é, $id_A(x) = x$ é uma função a qual recebe o nome de **função identidade** de A. Aqui $Dom(f) = Im(f) = A$.

Exemplo 1.2.12. Dados A e B conjuntos e $b \in B$ um elemento fixo, temos que a correspondência $f : A \longrightarrow B$ dada por $f(x) = b$, para todo $x \in A$ é uma função denominada **função constante**. Note que $Im(f) = \{b\}$.

Exemplo 1.2.13. A correspondência $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = mx + b$, com $m,\ b \in \mathbb{R}$ fixos, define a chamada **função afim**. Neste caso, $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.2.14. A correspondência $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ fixos, define a chamada **função polinomial de grau** n.

Exemplo 1.2.15. A correspondência $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

define a chamada **função modular** e $Im(f) = [0, +\infty)$.

Vale destacar que, conforme a definição acima, uma função fica inteiramente caracterizada por meio do seu domínio A e da sua regra de correspondência $y = f(x)$. Com isso, fica estabelecida a noção de igualdade entre funções: para f e g funções, vale

$$f = g \Leftrightarrow \ Dom(f) = Dom(g) \ e \ f(x) = g(x), \text{ para todo } x.$$

Gráfico de Funções

O gráfico de uma função é a representação visual dos pares ordenados $(x, f(x))$, mostrando como os valores de chegada $f(x)$ variam em relação aos valores de saída x. Tal recurso auxilia no entendimento do comportamento da função como um todo, em especial, crescimento, decrescimento, máximos e mínimos, conforme seções a seguir.

Para um bom entendimento da representação gráfica de uma função, vale relembrar a interpretação do conjunto $\mathbb{R}^2$ como **plano coordenado**. Sendo $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \; ; \; x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais, tais pares ordenados são representados no plano da seguinte forma:

1. considere dois eixos x e y perpendiculares na origem O;

2. dado um ponto P no plano, trace retas paralelas aos eixos coordenados passando por P;

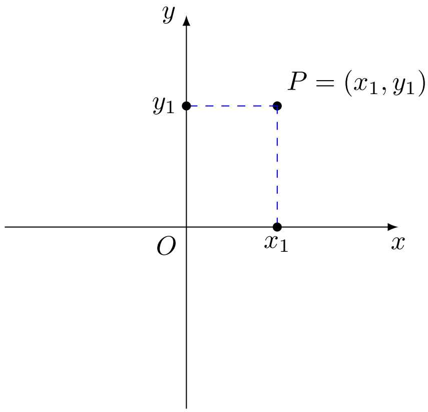
3. ficam determinados, de modo único, dois pontos P_1 e P_2 nos eixos x e y, respectivamente, para os quais já foi estabelecida uma coordenada em $\mathbb{R}$ (reta real);

4. sejam x_1 e y_1 as respectivas coordenadas de P_1 e P_2.

Assim, cada ponto P no plano fica associado de forma única ao par ordenado $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, onde o número x_1 é dito a primeira coordenada ou **abscissa**, e o número y_1 é dito a segunda coordenada ou **ordenada** de P.

Referente aos eixos coordenados tem-se

Figura 1.24: Plano Coordenado.

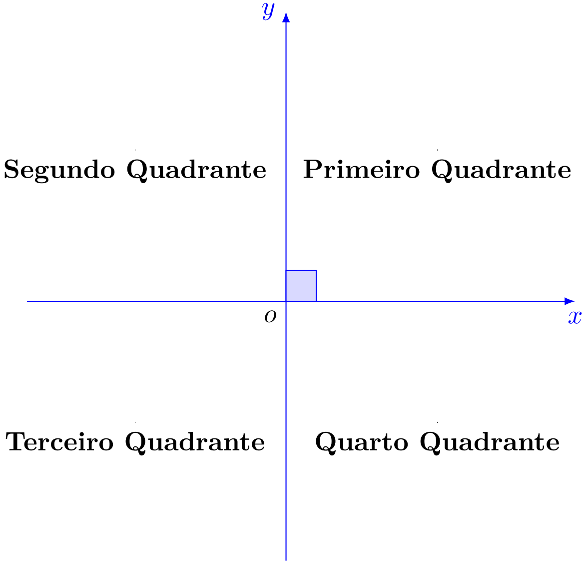


- no eixo - x os pontos têm coordenadas $(x, 0)$,
- no eixo - y os pontos têm coordenadas $(0, y)$.

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**:

- Primeiro Quadrante $\{(x, y)|x > 0 \;\; e \;\; y > 0\}$.
- Segundo Quadrante $\{(x, y)|x < 0 \;\; e \;\; y > 0\}$.
- Terceiro Quadrante $\{(x, y)|x < 0 \;\; e \;\; y < 0\}$.
- Quarto Quadrante $\{(x, y)|x > 0 \;\; e \;\; y < 0\}$.

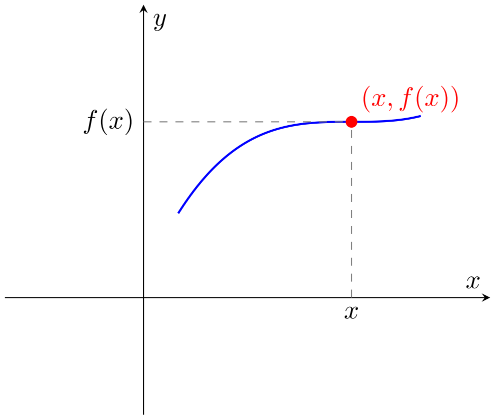
Figura 1.25: Quadrantes do plano coordenado.



Estabelecido o plano coordenado, define-se o **gráfico** de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como o conjunto $G(f)$ caracterizado como o lugar geométrico descrito pelos pares ordenados $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$, quando x percorre o domínio A. Formalmente,

$$\begin{aligned} G(f) &= \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = f(x),\ x \in \ A\} \\ &= \{(x, f(x)) \ ; \ x \in A\}. \end{aligned}$$

Figura 1.26: Gráfico de $y = f(x)$.



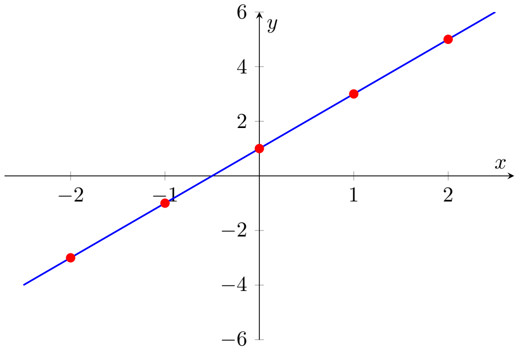
Um dos primeiros recursos para traçar gráficos de funções reais é o procedimento baseado em *substituição e interpolação*. A partir da lei de associação da função, monta-se uma tabela de valores e, em seguida, os pontos correspondentes são marcados no plano cartesiano e ligados.

Exemplo 1.2.16. Considere a função dada por $f(x) = 2x + 1$, definida em $\mathbb{R}$.

x	$f(x)$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

Com base na tabela acima, podemos inferir o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$ como segue.

Figura 1.27: Gráfico de $y = 2x + 1$.

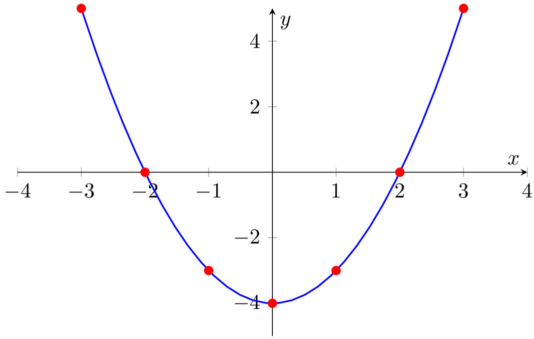


Exemplo 1.2.17. Para a função $f(x) = x^2 - 4$ tem-se

x	$f(x)$
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

Assim, como no exemplo anterior, o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$ será

Figura 1.28: Gráfico de $y = x^2$.



O método acima tem o inconveniente de ser aplicado em casos bem elementares de funções como as funções polinomiais acima. Para algumas funções pode-se aplicar métodos qualitativos baseados na noção de distância no plano.

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano coordenado e considere $Q = (x_1, y_2)$. Como $d(P_1, Q) = |y_2 - y_1|$ e $d(P_2, Q) = |x_2 - x_1|$ temos, pelo Teorema de Pitágoras

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_2, Q)^2 + d(P_1, Q)^2$$

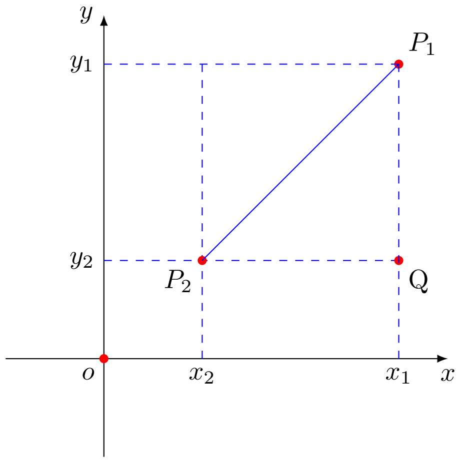
$$\Leftrightarrow d(P_1, P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

Portanto,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

A expressão acima define a distância no plano (bidimensional) entre dois pontos.

Figura 1.29: Distância no plnao coordenado.



Com base na noção de distância em $\mathbb{R}^2$, entende-se por **circunferência** o lugar geométrico formado pelos pontos do plano que têm a mesma distância a um ponto fixado. Ou seja, dados um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ e um número $r > 0$, a circunferência C de centro A e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do plano situados à distância r do ponto A:

$$C = \{P \in \mathbb{R}^2 \ ; \ d(P, A) = r\}.$$

Então, para $A = (a,\ b)$ e $P = (x,\ y)$,

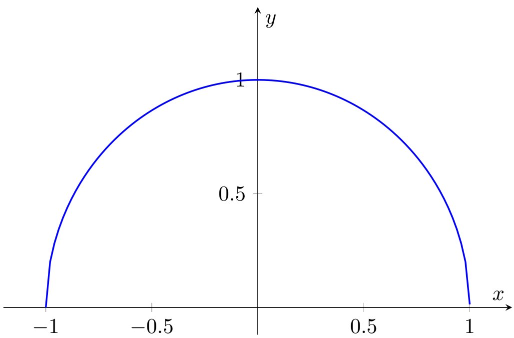
$$P \in C \Leftrightarrow d(P, A) = r \Leftrightarrow d(P, A)^2 = r^2,$$

logo,
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Com base na descrição acima podemos ainda obter gráficos de algumas funções.

Exemplo 1.2.18. Considere a função $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Com base na noção de distância acima segue que o gráfico da função f é uma semi-circunferência de centro na origem e raio 1, situada no semi-plano $y\geq 0$. De fato, basta observar que $(x,\ y)\in G(f)$ se, e somente se, $-1\leq x\leq 1$ e $y=\sqrt{1-x^2}$. Daí, temos $y\geq 0$ e $x^2+y^2=1$, o que caracteriza a uma semi-circunferência mencionada acima.

Figura 1.30: Gráfico de $y=\sqrt{1-x^2}$.



Exemplo 1.2.19. Considerando a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2x+1$, vista anteriormente, e P_1, P_2 e P_3 pontos quaisquer

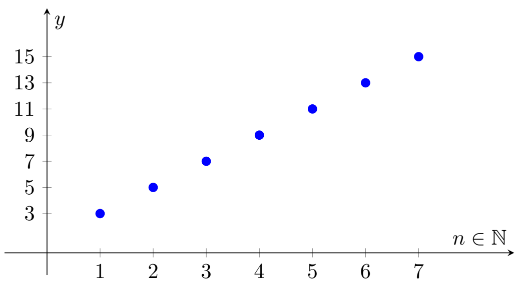
do gráfico de f, então tais pontos verificam

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3),$$

isto é, supondo $d(P_1, P_3)$ o maior dos três números, tem-se que P_1, P_2 e P_3 são **colineares**. Isso mostra diretamente que o gráfico de f é uma reta, como observado no Exemplo 1.2.16.

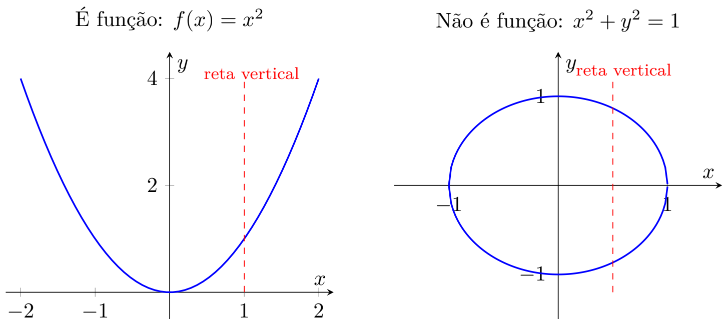
Exemplo 1.2.20. O gráfico de uma função está intimamente relacionado com o domínio da função. Isso pode ser notado considerando a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $g(n) = 2n + 1$. O gráfico dessa função consiste em um conjunto discreto de pontos (e não uma linha contínua).

Figura 1.31: Gráfico de $g(n) = 2n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$.



Em matemática ou em aplicações na física, engenharia e economia, é comum encontrar gráficos de relações entre variáveis. No entanto, nem toda relação entre duas variáveis representa uma função. A ferramenta visual que usamos para isso é o teste da reta vertical: Uma relação é função se nenhuma reta vertical intersecta seu gráfico em mais de um ponto.

Figura 1.32: Teste da reta vertical.



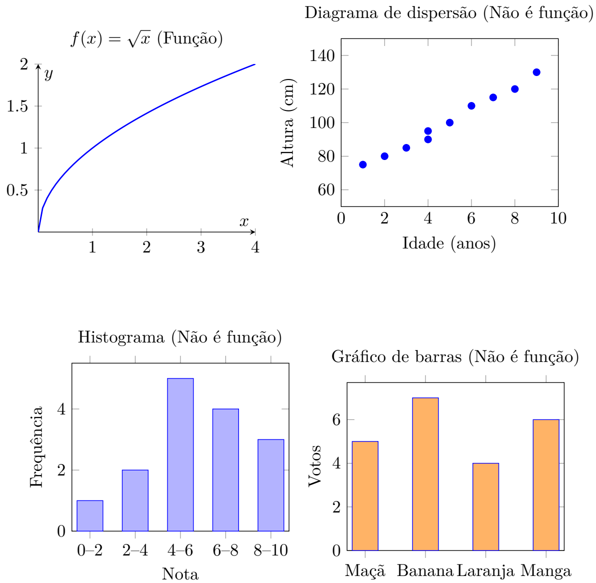
Observação 1.5. Vale destacar que uso de tabelas de valores para a construção de gráficos sempre deve ser complementado com uma análise qualitativa da função como, por exemplo, propriedades de crescimento, limitação e pontos extremos da função (conceitos apresentados mais adiante).

Observação 1.6. A construção de gráficos por meios qualitativos e quantitativos são facilitados com as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral.

Observação 1.7. Nem todos os tipos de gráficos usados para representar informações numéricas podem ser interpretados como gráficos de funções. Algumas representações comuns — como diagramas de dispersão, histogramas, e gráficos de barras —

exibem relações entre variáveis, mas não satisfazem a definição de função. Os gráficos abaixo representam, respectivamente, uma função, uma relação amostral (diagrama de dispersão) e dois gráficos estatísticos: histograma e gráfico de barras.

Figura 1.33: Exemplos de representações gráficas



Nas seções seguintes, serão abordadas apenas propriedades gerais das **funções reais de variável real**, isto é, funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, também será destacado o estudo das principais funções consideradas elementares: afins, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas. Compreender essas propriedades gerais é essencial para articulação coerente dos aspectos concreto (aplicações), abstrato (relação binária) e operacional (manipulações algébricas) do conceito de função.

1.3 Funções Monótonas

Algumas funções possuem certos comportamentos "padronizados". Dentre esses, destacam-se os conhecidos como **monótonos**, os quais estão associados com o estudo de crescimento e o decrescimento de funções. São eles: **crescente, não-decrescente, decrescente ou não-crescente**. Assim, uma função monótona em um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ pode ser crescente, decrescente, não-decrescente ou não-crescente neste conjunto.

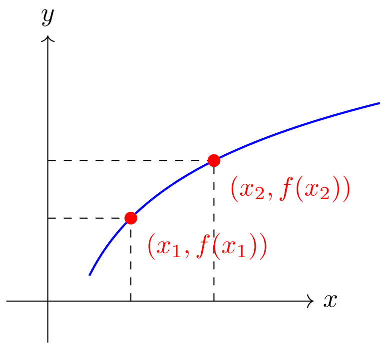
Definição 1.13. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é crescente em um subconjunto S de X, se dados $x_1, x_2 \in S$ vale a seguinte implicação

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Isso significa que ao aumentarmos o valor atribuído a x, o valor de y também aumenta (ver Figura 1.34).

Exemplo 1.3.1. A função $y = f(x) = x^2$ definida em $\mathbb{R}$. Segue que f é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$. De fato, sejam

Figura 1.34: Função Crescente.



$x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Então,

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Logo, $f(x_2) > f(x_1)$, mostrando que f é crescente em S. Note que tal comportamento não ocorre em todo o seu domínio de definição.

Exemplo 1.3.2. A função dada por $f(x) = 3x + 1$, com $x \in \mathbb{R}$, é crescente. De fato, para $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, vale

$$3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 1 < 3x_2 + 1,$$

ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Segue que $y = 3x + 1$ é monótona crescente.

Exemplo 1.3.3. Considere $f(x) = \sqrt{x}$, definida em $[0, +\infty)$. Então, se $0 \leq x_1 < x_2$, então $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. De fato, faça $x_1 = a^2$

e $x_2 = b^2$. Então, $x_1 < x_2$ implica em $a^2 - b^2 < 0$. Assim, procedendo como acima concluímos que $a < b$. Logo:

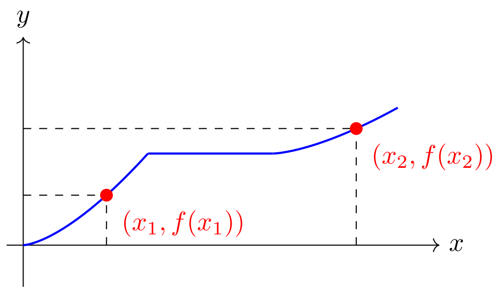
$$f(x_1) = \sqrt{x_1} = a < b = \sqrt{x_2} = f(x_2).$$

Portanto, f é crescente em $[0, +\infty)$.

Definição 1.14. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é não-decrescente em um subconjunto S de X, se

$$\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Figura 1.35: Função Não-Decrescente



Nesse contexto a função mantém um processo de crescimento, porém permitindo intervalos onde a função será constante.

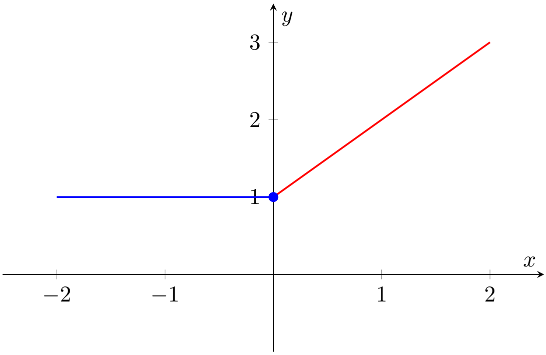
Exemplo 1.3.4. Defina:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Então, f é não-decrescente. De fato,

- Se $x_1, x_2 \leq 0$, então $f(x_1) = f(x_2) = 1$;
- Se $x_1 \leq 0 < x_2$, então $f(x_1) = 1 < x_2 + 1 = f(x_2)$;
- Se $x_1, x_2 > 0$ e $x_1 < x_2$, então $f(x_1) = x_1 + 1 < x_2 + 1 = f(x_2)$.

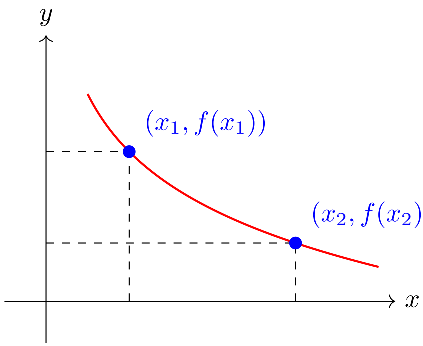
Figura 1.36: Gráfico de $y = f(x)$.



Definição 1.15. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é decrescente em um subconjunto S de X, se

$$\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Figura 1.37: Função Decrescente



Ou seja, ao aumentarmos o valor atribuído a x, o valor de y diminui.

Exemplo 1.3.5. Considere $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com domínio $(0, +\infty)$. Então, se $0 < x_1 < x_2$, segue das propriedades dos números reais que

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

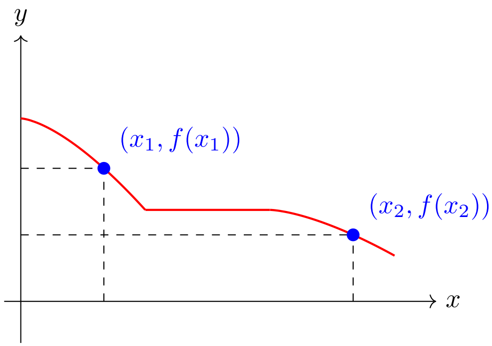
Portanto, f é decrescente.

Exemplo 1.3.6. Dada uma função crescente f em um domínio $I \subset \mathbb{R}$, segue que $-f$ é decrescente no mesmo domínio. Assim, $g(x) = -x^2$ e $h(x) = -\sqrt{x}$ são decrescentes em $I = [0,\ +\infty)$.

Definição 1.16. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é não-crescente em um subconjunto S de X, se

$$\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Figura 1.38: Função Não-Crescente



Exemplo 1.3.7. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

segue que

- se $x_1, x_2 \leq 1$, então $f(x_1) = f(x_2) = 3$;
- se $x_1 \leq 1 < x_2$, então $f(x_1) = 3 > \dfrac{1}{x_2} = f(x_2)$;

- se $x_1, x_2 > 1$ e $x_1 < x_2$, então $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Portanto, f é não crescente.

Observação 1.8. Toda função crescente em um conjunto S é também não-decrescente nesse conjunto, e toda função decrescente em S é também não-crescente. Além disso, como observado no exemplo abaixo, algumas funções podem não ser monótonas em todo o seu domínio.

Exemplo 1.3.8. Considere $f(x) = x^2$, definida em $\mathbb{R}$. Em $(-\infty, 0]$, se $x_1 < x_2 \leq 0$, então $x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, ou seja, f é decrescente. Agora em $[0, +\infty)$, se $0 \leq x_1 < x_2$, então $x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, f é crescente. Portanto, $f(x) = x^2$ é decrescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty)$.

1.4 Funções Limitadas

Definição 1.17. Diz-se que uma função f é limitada, se seu conjunto imagem, $Im(f)$, é um conjunto limitado. Caso contrário, a função f será dita ilimitada.

Das propriedades do valor absoluto e da noção de intervalos em $\mathbb{R}$, tal definição é equivalente a:

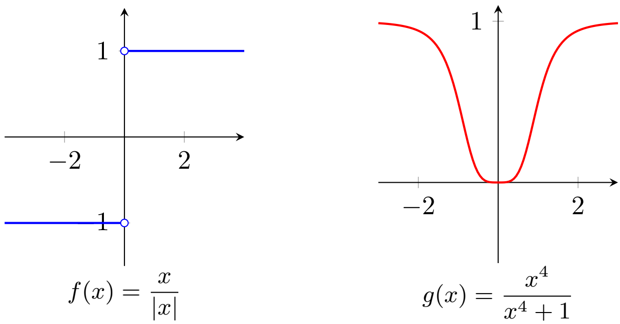
1. existir um intervalo aberto $I = (a, b)$, $a,\ b \in \mathbb{R}$, tal que $Im(f) \subset (a, b)$; ou ainda,

2. existir $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, para todo $x \in Dom(f)$.

Assim, o gráfico de uma função limitada sempre estará contido em uma faixa horizontal do plano.

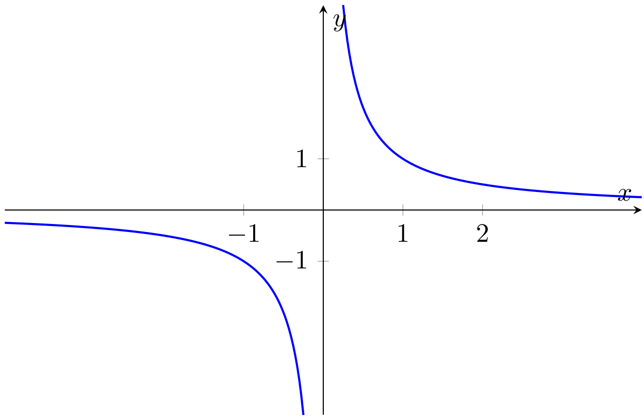
Exemplo 1.4.1. As funções $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ e $g(x) = \dfrac{x^4}{x^4+1}$ são limitadas em $\mathbb{R}$. Neste caso, tem-se $Im(f) \subset [-1, 1]$, isto é, $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e $Im(g) \subset [0, 1]$.

Figura 1.39: Funções limitadas.



Exemplo 1.4.2. A função dada por $h(x) = \dfrac{1}{x}$ é ilimitada em $\mathbb{R}$. De fato, basta observar que para valores de x suficientemente próximos de 0, os valores correspondentes de y tornam-se arbitrariamente grandes. Assim, não existe nenhuma faixa horizontal do plano que contenha o gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$.

Figura 1.40: Gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$.



Com base na noção de funções limitadas, podemos definir as noções de máximo e mínimo de uma função. Ao longo da disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, será de grande importância o cálculo dos pontos de máximo e de mínimo de uma função, caso existam. Tal estudo será fortemente auxiliado pela noção de derivada de uma função.

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição 1.18. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto de **máximo local** de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é o valor máximo local.

Definição 1.19. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto de **mínimo local** de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é o valor mínimo local.

Definição 1.20. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto de **máximo global** de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Assim, diremos que $f(x_0)$ é o valor máximo global.

Definição 1.21. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto de **mínimo global** de f, se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Do mesmo modo, diremos que $f(x_0)$ é o valor mínimo global.

Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo local**, se x_0 for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local. Do mesmo modo, um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo global**, se x_0 for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.

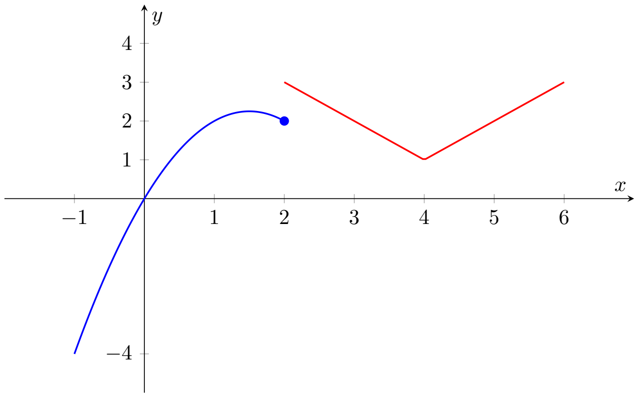
Exemplo 1.4.3. Considere a função $f : (-1, 6] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - x^2, & se \ x \leq 2 \\ |x - 4| + 1, & se \ x > 2. \end{cases}$$

Nesse caso, a função f

- possui um máximo local em $x_0 = \dfrac{3}{2}$;
- possui mínimos locais em $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$;
- possui um máximo absoluto em $x_3 = 6$;
- não possui mínimos absolutos.

Figura 1.41: Máximos e mínimos de f.



1.5 Operações com Funções

Dadas as funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos definir novas funções $f+g$ a **função soma** de f com g, $f-g$ a **função diferança** de f com g, $f \cdot g$ a **função produto** de f por g, e $\dfrac{f}{g}$ a **função quociente** de f com g da seguinte forma:

(a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;

(b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$;

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, se $g(x) \neq 0$.

Em geral as funções f e g na definição acima podem ter domínios diferentes, $Dom(f)$ e $Dom(g)$, respectivamente. Nesse caso, as operações acima ainda podem ser consideradas desde que

$$x \in Dom(f) \cap Dom(g).$$

Exemplo 1.5.1. Considere as funções dadas por $f(x) = \sqrt{7-x}$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$, então $Dom(f) = (-\infty, 7]$, $Dom(g) = [2, +\infty)$ e $Dom(f) \cap Dom(g) = [2, 7]$. Temos que,

$$(f+g)(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x-2}$$

e

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{(7-x)(x-2)} = \sqrt{-x^2 + 9x - 14},$$

ambas definidas para $2 \leq x \leq 7$.

Exemplo 1.5.2. Considerando duas funções polinomiais, podemos considerar uma nova função chamada função racional

$$h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

definida para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $Q(x) \neq 0$.

Outra operação com funções de grande importância consiste em obter a **função composta** de duas funções dadas.

Definição 1.22. Dadas funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, com $Y \subset Z$. Dado $x \in X$, podemos definir uma nova função $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $h(x) = g(f(x))$. Tal função é denominada **função composta** de g com f e será denotada por $g \circ f$.

Assim,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(u).$$

Figura 1.42: Diagrama associado a função composta $g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \in Y \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \in Z \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.5.3. Se f e g são definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, então

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Note que o domínio de g é $[0, +\infty)$, desde que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a função composta acima está bem definida.

Exemplo 1.5.4. Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$, então $(g \circ f)(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2 + 3(2x+1) = 4x^2 + 10x + 4$. Do mesmo modo temos: $(f \circ g)(x) = f(x^2 + 3x) = 2(x^2 + 3x) + 1 = 2x^2 + 6x + 1$.

Note que, em geral, $g \circ f \neq f \circ g$, isto é, a composição de funções não é comutativa. Entretanto, vale a propriedade associativa para tal operação (verifique!).

Exemplo 1.5.5. Considerando $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$, temos

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

$$\begin{aligned} &= f(g(x+3)) \\ &= f\left((x+3)^{10}\right) \\ &= \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}. \end{aligned}$$

1.6 Função Inversa

Em muitas situações nas ciências exatas, é comum querermos "desfazer" uma transformação matemática aplicada a uma variável. Por exemplo, se conhecemos a relação entre o tempo e a posição de uma partícula dada por uma função f, pode ser necessário determinar o instante exato em que a partícula atingiu uma determinada posição, isto é, inverter a função original. A noção de função inversa formaliza essa ideia. Assim, dado um processo f que associa a cada entrada x uma única saída $y = f(x)$, a função inversa associa, sob certas condições, y de volta ao valor original x.

O estudo das funções inversas é fundamental em diversas áreas da ciência, como na resolução de equações, na modelagem de sistemas físicos ou na análise de dados experimentais. Para que uma função admita inversa, ela deve ser bijetiva, ou seja, injetiva e sobrejetiva. No entanto, em muitos contextos científicos, mesmo funções que não são invertíveis globalmente podem ser invertidas localmente em trechos de seu domínio.

Estuda-se a seguir o conceito de função inversa, bem como os critérios que garantem sua existência, e sua representação gráfica.

Definição 1.23. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é injetiva, se elementos diferentes de X são transformados por f em elementos diferentes em $\mathbb{R}$. Ou seja,

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Uma forma equivalente (contrapositiva): Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é injetiva, se

$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemplo 1.6.1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2x+1$ é injetiva. De fato, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Temos:

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemplo 1.6.2. Considere a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$. Então, f é injetiva. Para provar isso sejam $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Temos:

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \ ou \ x_1 = -x_2.$$

Como $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, segue que $x_1 = x_2$, garantindo a injetividade da função em questão.

Outra forma de provar que a função do exemplo acima é injetiva é, dados $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ com $x_1 < x_2$ (sem perda de generalidade), observar que f é crescente. Assim, segue que $f(x_1) < f(x_2)$ e, portanto, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 1.24. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva, se sua imagem é igual ao contradomínio. Ou seja, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe (pelo menos um) $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 1.6.3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2x + 1$ é sobrejetiva. Seja $y \in \mathbb{R}$. Devemos investigar a equação $f(x) = y$. Com efeito,

$$2x + 1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}.$$

Assim, existe $x = \dfrac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Logo, f é sobrejetiva.

Observação 1.9. Mostrar que a função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $y = f(x) = x^2$ é sobrejetiva é bem mais complicado! Será necessário utilizar a noção de **funções contínuas**, que será estudada posteriormente.

Definição 1.25. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é bijetiva, se for injetiva e sobrejetiva. Ou seja, se

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

e

$$\forall\ y \in \mathbb{R},\ \text{existir (pelo menos um) } x \in X \text{ tal que } f(x) = y.$$

Exemplo 1.6.4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ é bijetiva!

Note que a noção de bijetividade, assim como a de injetividade e a de sobrejetividade, depende do **domínio da função** em estudo.

Exemplo 1.6.5. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ambas definidas por $y = x^2$. Então, f não é bijeção (pois não é injetiva e nem sobrejetiva), enquanto g é bijeção.

Estabelecida a noção de funções compostas e de funções bijetivas, estamos em condições de definir e caracterizar o que se entende por função inversa.

Definição 1.26. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é inversível se existe uma função $g : Y \to X$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \text{ para todo } x \in X$$

e

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y, \text{ para todo } y \in Y.$$

A função g é chamada de inversa de f e denotada por f^{-1}. Assim,

$$g = f^{-1}.$$

Em particular, f^{-1} função inversa de f é caracterizada por

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Observação 1.10.

1. Note ainda que

$$f^{-1} \circ f = id_X{}^1 \quad e \quad f \circ f^{-1} = id_Y.$$

[1] Função identidade, isto é, $id_X : X \to X$ e $id_X(x) = x$ para todo $x \in X$.

2. Não é difícil provar que a função inversa de f, quando existe, é única.

Exemplo 1.6.6. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ é inversível. Nesse caso, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$ é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x,$$

e

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Assim, podemos escrever

$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Em geral, para obter a função inversa de f:

(i) considere $y = f(x)$;

(ii) então, resolva tal equação para x em termos de y;

(iii) por fim, "troque os papéis" de x por y para expressar f^{-1} como função de x.

Esse roteiro funciona em muitos caso, a depender da complexidade da regra que define a função em estudo.

Note ainda que

$$f^{-1}(x) \ e \ [f(x)]^{-1}$$

denotam objetos diferentes:

- $f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x;
- $[f(x)]^{-1}$ é igual a $\dfrac{1}{f(x)}$.

Assim, no exemplo anterior temos

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

e

$$[f(x)]^{-1} = \frac{1}{2x+1}.$$

Teorema 1.2. Uma função $f : X \to Y$ é inversível se, e somente se, f for uma bijeção.

Demonstração. Se $f : X \to Y$ é inversível, então existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$, e $f(g(y)) = y$, para todo $y \in Y$. Suponha, por absurdo, que f não seja injetiva. Então existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. Mas, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, isto é, $x_1 = x_2$, uma contradição. Assim $f : X \to Y$ é injetiva. Seja $y \in Y$. Se $x = g(y)$, então $f(x) = f(g(y)) = y$. Isso mostra que $f : X \to Y$ é sobrejetiva. Portanto, segue que f é bijetiva.

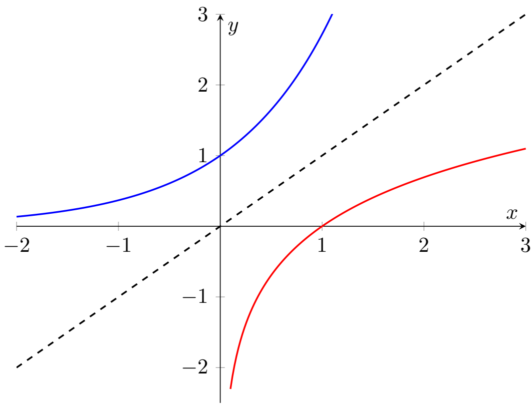
Por outro lado, como $f : X \to Y$ é sobrejetiva, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Mais ainda: como f é injetiva, esse x é único. Considere então a função $g : Y \to X$ definida por $g(y) = x$, onde x é o único elemento de X tal que $f(x) = y$. Observe que $g(f(x)) = g(y) = x$, para todo $x \in X$ e $f(g(y)) = f(x) = y$, para todo $y \in Y$. Sendo assim, f é inversível e sua inversa é $f^{-1} = g$. ■

Observação 1.11. Provar que uma função é inversível pode não ser uma tarefa fácil, seja com a definição, seja com a proposição anterior. Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral são apresentadas novas ferramentas para determinar se uma função é inversível (localmente).

Em relação ao gráfico de função inversa f^{-1}, o mesmo pode ser obtido diretamente do gráfico da função f conforme o resultado a seguir.

Teorema 1.3. Dada uma função inversível $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos $G(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y))\ ;\ y \in \mathbb{R}\} = \{(f(x), x)\ ;\ x \in X\}$.

Figura 1.43: Gráfico da função inversa.



Ou seja, $G(f^{-1})$ é a reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$.

Para aprofundar os estudos em relação aos tópicos abordados neste capítulo, recomendamos as referências clássicas (IEZZI; MURAKAMI, 2013) e (GUIDORIZZI, 2013).

1.7 Exercícios de Fixação

1. Sejam $x,\ y \in \mathbb{R}_+^*$. Prove que
   (a) $x < y \iff x^{-1} > y^{-1}$;
   (b) $x > 0 \iff x^{-1} > 0$.
2. Mostre que:
   (a) $a < b \ \Rightarrow\ a < \dfrac{a+b}{2} < b$.
   (b) Se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.
3. Mostre que se $a^2 + b^2 = 0$ então $a = 0$ e $b = 0$.
4. Eliminar o módulo e simplificar a expressão:
   (a) $|x|$
   (b) $|x+1|$
   (c) $|x-1| + |x+2|$
   (d) $|x| + |x-1| + |x-2|$
   (e) $y = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, $x \neq 1$;
   (f) $y = \dfrac{x+|x|}{2|x|}$, $x \neq 0$.

5. Resolva as equações modulares abaixo:

   (a) $|x-4|=2$;

   (b) $|1+2x|=|1-2x|$;

   (c) $|2x-3|=|1+x|$.

6. Ache todos os valores de x que satisfazem cada uma das seguintes condições:
   (a) $|x-1|=5$ (b) $|x+4|=3$ (c) $|x+1|=|x-2|$
   (d) $|x^2-5|\leq 4$

7. Mostre que $|a-b|\leq |a|+|b|$, para todos $a,b\in\mathbb{R}$.

8. Resolva as seguintes inequações:
   (a) $x(x-1)>0$ (b) $x^4<x^2$ (c) $x^2+4x>0$ (d) $2x^2+x<3$
   (e) $x^3+1<x^2+x$ (f) $(2x+1)^8(x+1)\leq 0$

9. Continue resolvendo inequações:

   (a) $3x+1<x+4$;

   (b) $2x-7>5x+2$;

   (c) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{1-x}{4}\leq 1$;

   (d) $2(1+x)-\dfrac{x}{3}+\dfrac{2x-1}{2}>\dfrac{7x}{6}$;

   (e) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{4}\geq 0$;

   (f) $\left|1+\dfrac{x}{2}\right|<4$;

(g) $\left|2 - \dfrac{5x}{2}\right| > 1$;

(h) $1 - \dfrac{1}{|x|} > 0$.

10. Escreva em notação de intervalo o conjunto solução das inequações da questão anterior.

11. Descreva os conjuntos a seguir e represente os mesmos geometricamente.

    (a) $[0,2] \cap [1,3]$

    (b) $(-\infty, 2] \cap [0, +\infty)$

    (c) $\left[-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right]$

12. Faça um esboço da região do plano descritas pelas relações a seguir:
    (a) $x < 2$ (b) $-1 < y \leq 2$ (c) $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$
    (d) $y = x$

13. Verifique, em cada caso, se a equação determina ou não y como função de x e, em caso afirmativo, ache uma fórmula para a função.
    (a) $3x^2 + y^2 = 1$; (b) $3x^2 + y = 1$; (c) $\dfrac{y+1}{y-1} = x$;
    (d) $x = y - \dfrac{1}{y}$; (e) $xy^2 = x - 1$; (f) $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

14. Se $f(x) = 1 + x$ calcule $f(1)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{1}{f(2)}$, $f(a+b)$, $f(a) + f(b)$ e $f(a^2)$.

15. Determine o domínio e contradomínio da função $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

16. Calcule os ponto de x em que a função $g(x) = x^3 - 4x$ é igual a zero.

17. Se $f(x) = x^3 - \pi x^2 + 4x - 2$, calcule $f(1)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(a+b)$ e $f(\frac{1}{a})$, com $a \neq 0$.

18. Calcule:
a) $f(-1)$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)$ sendo $f(x) = -x^2 + 2x$
b) $g(0), g(2)$ e $g(\sqrt{2})$ sendo $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$
c) $\frac{f(a+b)-f(a-b)}{ab}$ sendo $f(x) = x^2$ e $ab \neq 0$
d) $\frac{f(a+b)-f(a-b)}{ab}$ sendo $f(x) = 3x + 1$ e $ab \neq 0$

19. Considere a função $f(x) = \max\left\{x, \frac{1}{x}\right\}$.
a) Calcule $f(2), f(-1)$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
b) Dê o domínio e esboce o gráfico.

20. Considere a função $f(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$. (Função maior inteiro.)
a) Calcule $f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f\left(\frac{5}{4}\right)$ e $f\left(-\frac{1}{5}\right)$.
b) Esboce o gráfico.

21. Simplifique $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$, com $x \neq p$, sendo dados:
a) $f(x) = x^2$ e $p = 1$

b) $f(x) = x^2$ e $p = -1$
c) $f(x) = x^2$ e p qualquer
d) $f(x) = 2x + 1$ e $p = 2$
e) $f(x) = 2x + 1$ e $p = -1$
f) $f(x) = 5$ e $p = 2$
g) $f(x) = x^3$ e $p = 2$
h) $f(x) = x^3$ e $p = -2$
i) $f(x) = x^3$ e p qualquer
j) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $p = 1$
l) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $p = 2$
m) $f(x) = x^2 - 3x$ e $p = -2$
n) $f(x\frac{1}{x^2}$ e $p = 3$
o) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $p = -3$
p) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $p \neq 0$
q) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $p \neq 0$

22. Simplifique $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, com $h \neq 0$, sendo $f(x)$ igual a
a) $2x + 1$
b) $3x - 8$
c) $-2x + 4$
d) x^2
e) $x^2 + 3x$
f) $-x^2 + 5$

g) $x^2 - 2x$
h) $x^2 - 2x + 3$
i) $-2x^2 + 3$
j) $2x^2 + x + 1$
l) x^3
m) $x^3 + 2x$
n) $x^3 + x^2 - x$
o) 5
p) $\dfrac{1}{x}$
q) $2x^3 - x$
r) $\dfrac{1}{x^2}$
s) $\dfrac{1}{x+2}$

23. Obtenha o domínio de cada uma das funções a seguir:
(a) $\sqrt{x^2-4}$ (b) $\sqrt{(x-1)(x+2)}$ (c) $\dfrac{1}{x^2-4}$
(d) $\dfrac{x}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}$ (e) $\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^2+x+1}$
(f) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/4}$ (g) $\dfrac{x^3}{|x^2-25|}$

24. Determine o domínio e esboce o gráfico.
(a) $f(x) = 3x$ (b) $g(x) = -2$ (c) $h(x) = |x|$

(d) $g(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \leq 2 \\ -2 \text{ se } x > 2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 \text{ se } x \leq 1 \\ 1 \text{ se } 1 < x < 2 \\ 2x-3 \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$

(f) $h(x) = x^2 + 1$ (g) $f(x) = \sqrt{x+3}$

25. Considere a função $f(x) = |x-1| + |x-2|$.

 a) Mostre que $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 2x-3 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$

 b) Esboce o gráfico de f.

26. Determine $f+g$, fg e $\dfrac{f}{g}$ explicitando os respectivos domínios.

 (a) $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 1$ (b) $f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

27. Determine as compostas $h(x) = f(g(x))$ e $w(x) = g(f(x))$.

 (a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = x^2$

 (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x^3 - x^2$

 (c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ e $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

28. Dada a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, calcule $f(f(x))$.

29. Uma função diz-se **par** se $f(-x) = f(x)$ para todo x no domínio de f e diz-se **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$ para todo x no domínio de f (em cada caso, entende-se que $-x$ está no domínio de f quando x está). Determine se cada uma

das seguintes funções é par, ímpar ou nenhuma das duas:
(a) $f(x) = x^3$
(b) $f(x) = x(x+1)$
(c) $f(x) = |x|$
(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
(e) $f(x) = |x|^3$
(f) $f(x) = -3 + \sqrt{x+2}$
(g) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2-x}$.

30. Dada uma função $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, defina as funções: $g(x) = \dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ e $h(x) = \dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$. Mostre que g é par e h é ímpar.

31. Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se escreve como soma de uma função par com uma função ímpar.

32. Determine o domínio e contradomínio da função $f(x) = \sqrt{x-3}$.

33. Considere a função $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$. Calcule seu domínio e imagem.

34. Dada a função $h(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, determine o domínio e o contradomínio.

35. Para a função $f(x) = x^2 - 4x + 5$, determine o domínio, contradomínio e a imagem.

36. Determine se a função $f(x) = -2x + 3$ é crescente ou decrescente.

37. Para a função $g(x) = x^3 - 3x^2$, determine os intervalos em que ela é crescente e decrescente.

38. Verifique se a função $h(x) = \frac{1}{x}$ é crescente ou decrescente no intervalo $x > 0$.

39. Considere a função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. Determine se ela é crescente ou decrescente.

40. Encontre o valor máximo e mínimo da função $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ no intervalo $[-2, 2]$.

41. Calcule a função inversa de $f(x) = \dfrac{2x-5}{3}$.

42. Encontre a função inversa de $f(x) = 2x - 5$.

43. Dada a função $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$, determine sua inversa.

44. Se um triângulo equilátero tem lado x, exprima sua área como função de x.

45. Seja d a distância de $(0, 0)$ a (x, y). Expresse d em função de x, sabendo que (x, y) é um ponto do gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$.

46. Os lados iguais de um triângulo isósceles tem medida 2. Se x é a base, exprima a área como função de x.

47. O perímetro de um triângulo retângulo é 6 e a hipotenusa é x. Exprima a área como função de x.

48. Um retângulo, cuja base tem comprimento x, está inscrito num círculo de raio a. Exprima a área do retângulo como função de x.

49. Um fio de comprimento L é cortado em dois pedaços, e estes tomam a forma de uma circunferência e de um quadrado. Se x é o lado do quadrado, exprima a área total englobada pelas duas figuras como função de x.

50. As leis da Física, muitas vezes, descrevem relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas. Para cada uma das leis abaixo, escreva a expressão matemática correspondente.

    a) (Lei da Gravitação Universal). Matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado das distâncias.

    b) (Gases Perfeitos). A pressão exercida por uma determinada massa de um gás é diretamente proporcional à temperatura absoluta e inversamente proporcional ao volume ocupado pelo gás.

    c) (Resistência Elétrica). A resistência de um fio condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à área de sua seção reta.

    d) (Dilatação Térmica). A dilatação térmica sofrida por uma barra é diretamente proporcional ao comprimento da barra e à variação de temperatura.

51. As emissões de chumbo são uma das principais causas da poluição do ar nos Estados Unidos. Usando dados colhidos pela U. S. Environmental Protection Agency na década de 1990, é possivel mostrar que a expressão

$$N(t) = -35t^2 + 299t + 3347$$

fornece aproximadamente a emissão total N de chumbo (em milhares de toneladas) ocorrida nos Estados Unidos t anos após o ano base de 1990.

a) De acordo com esta expressão, qual deveria ter sido o emissão de chumbo em 1995?

b) De acordo com esta expressão, em que ano da década de 1990 e 2000 a poluição de chumbo foi maior?

52. Um estudo de eficiência no turno da manhã em uma certa fábrica mostra que, em média, um operário que chega no trabalho às 8 h terá montado

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$$

aparelhos de televisão x horas depois.

a) Quantos aparelhos um operário já montou, em média, às 10 h da manhã?

b) Quantos aparelhos um operário monta, em média, entre 9 h e 10 h da manhã?

53. Durante um programa nacional de vacinação da população contra um certo tipo de gripe, as autoridades descobrem

que o custo para vacinar $x\%$ da população é dado aproximadamente por

$$C(x) = \frac{150x}{200 - x} \text{ milhões de reais.}$$

(a) Qual é o domínio da função custo acima?

(b) Para que valores de x a função $C(x)$ tem significado neste contxto?

(c) Qual o custo para vacinar os 50% da população?

(d) Que porcentagem da população terá sido vacinada após serem gastos 37,5 milhões de reais no programa?

54. Durante períodos úmidos, uma fina camada de água está presente na superfície de folhas e outros detritos depositados no solo. Esta película é o habitat de numerosas bactérias, protozoários, fungos, esporos e outros organismos microscópicos. Pode-se visualizar tais organismos se os detritos úmidos forem imersos em água contida num prato de vidro e a extremidade de uma lâmina fina de vidro for mergulhada nesse prato. Se a lâmina formar um ângulo α com a superfície horizontal do prato e da sua outra extremidade deixar-se escoar água límpida, observa-se que os microorganismos movem-se ao longo da lâmina, em direção contrária à do fluxo da água (Bandoni e Koske, 1974).

    (a) Faça um esboço geométrico do problema.

(b) Se a distância percorrida pelos microorganismos ao longo da lâmina é d, calcular a altura vertical h que é atingida pelos microorganismos.

55. Uma barra vertical de 2m de comprimento produz uma sombra em um plano horizontal. Os raios da luz solar tem uma inclinação $\theta = 67°$ em relação ao plano horizontal.

    (a) Faça um esboço geométrico do problema.

    (b) Qual o comprimento da sombra?

    (c) Qual seria o comprimento da sombra se a barra fosse horizontal, e o plano vertical de frente para o sol?

56. A velocidade do sangue a r cintímetros do eixo central de uma artéria é dado pela função $S(r) = C(R^2 - r^2)$, onde C é uma constante e R é o raio da artéria. Qual o domínio desta função? Esboce o gráfico de $S(r)$.

57. O volume V, em cm^3, de um vaso sanguíneo cilindrico é uma função do raio r, em cm. Tal função é dada por $V = V(r) = 8\pi r^3$. O que acontece com o volume se o raio é reduzido pela metade devido ao acúmulo de gordura nos vasos?

58. A forma de um tumor canceroso é aproximadamente esférica e, portanto, seu volume é dado, aproximadamente, por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

onde r é o raio do tumor em cm. Quando foi descoberto, o tumor tinha 0,73cm de raio; 45 dias depois, o raio aumentou para 0,95cm. Qual foi o aumento de volume do tumor nesse período?

CAPÍTULO 2

Funções Polinomiais

As funções polinomiais ocupam um papel central na modelagem de fenômenos naturais, sociais e tecnológicos. Sua estrutura algébrica simples, composta por somas e potências de uma variável com coeficientes constantes, torna tais funções especialmente adequadas para representar comportamentos regulares e suaves, como trajetórias, velocidades, crescimentos, oscilações e muitas outras relações observadas em contextos científicos.

Exemplo 2.0.1.

(a) Física: o movimento de um corpo sob aceleração constante, como a queda livre, é descrito por uma função polinomial de segundo grau:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

onde $s(t)$ representa a posição ao longo do tempo.

(b) Química: funções polinomiais podem modelar taxas de reação aproximadas ou ajustes experimentais de curvas de absorção em espectrofotometria.

(c) Biologia: curvas de crescimento populacional podem ser inicialmente ajustadas por funções polinomiais de grau 2 ou 3 antes de adotar modelos logísticos mais realistas.

(d) Engenharia: em análise estrutural, funções polinomiais de grau 3 ou 4 são usados para descrever a deformação de vigas sob carga distribuída.

(e) Economia e Ciências Sociais: ajustes de regressão polinomial são frequentemente usados para representar tendências e fazer previsões com base em dados experimentais.

Além de sua utilidade prática, as funções polinomiais também fornecem um ponto de entrada fundamental para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, sendo utilizadas na aproximação de funções mais complexas (por exemplo, por meio de séries de Taylor) e na solução de equações diferenciais. No que segue estuda-se suas principais características e propriedades.

Definição 2.1. Diz-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números reais $a_n, \cdots, a_1, a_0$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$ diz-se que f tem grau n (**Notação:** $gr.f(x) = n$).

Exemplo 2.0.2. São funções polinomiais:

- $f(x) = 5$ (constante ou $gr.f(x) = 0$),
- $f(x) = x$ (identidade, $gr.f(x) = 1$),
- $f(x) = 3x + 2$ (afim, $gr.f(x) = 1$),
- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ (quadrática ou $gr.f(x) = 2$),
- $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3$ ($gr.f(x) = 3$),
- $f(x) = 3x^5 + 4x^4 + \pi x^2 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{5}$ ($gr.f(x) = 5$).

Exemplo 2.0.3. As funções dadas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$ não são polinomiais.

A soma e o produto de funções polinomiais são ainda funções polinomiais. Nesse caso, vale em geral que:

$$gr.\,(f(x) + g(x)) = \max\{gr.f(x),\ gr.g(x)\}$$

e

$$gr.\,(f(x) \cdot g(x)) = gr.f(x) + gr.g(x).$$

Um exemplo interessante de produto (ou decomposição polinomial) é

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}).$$

Diz-se que $f(x) = x^n - \alpha^n$ é divisível por $g(x) = x - \alpha$.

Como consequência direta do produto anterior, podemos escrever para uma função polinomial f de grau n:

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha) &= a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) \cdots + a_1(x - \alpha) \\ &= (x - \alpha)Q(x), \end{aligned}$$

para alguma função polinomial Q de grau $n - 1$. Ou seja,

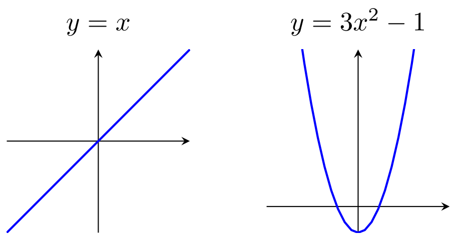
$$f(x) = (x - \alpha)Q(x) + f(\alpha),$$

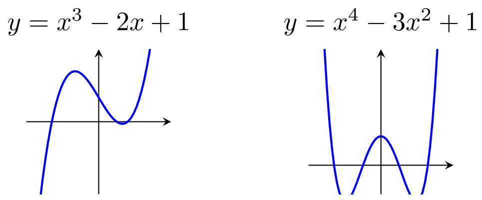
para todo $x, \alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, α é um(a) **zero (raiz)** de f, isto é, $f(\alpha) = 0$, se, e somente se, $f(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

Observação 2.1. O número de zeros de uma função polinomial f é finito e limitado pelo grau de f.

Para uma função polinomial de grau n, a paridade de n tem forte influência sobre o gráfico, como apontam os exemplos abaixo.

Figura 2.1: Gráfico de funções polinomiais.





Em geral, dada $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial de grau n, as informações são de grande utilidade

1. Se n é par então, para $|x|$ suficientemente grande, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a_n. Este sinal é, portanto, o mesmo, não importando se $x < 0$ ou $x > 0$, desde que $|x|$ seja suficientemente grande.

2. Se, entretanto, n é ímpar, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos muito grandes de x e tem o sinal oposto de a_n para valores negativos muito grandes de x.

3. Considere uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se existem α, $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $f(\alpha) > 0$ e $f(\beta) < 0$, então deve existir um(a) zero (raiz) de f entre α e β.

Observação 2.2. Este último resultado é de grande relevância, pois serve de base para diversos métodos numéricos de aproximação de raízes, tanto em procedimentos iterativos manuais quanto em algoritmos computacionais. Para uma apresentação detalhada e aprofundada desses métodos, recomenda-se consultar a referência (RUGGIERO; LOPES, 1998).

A seguir estuda-se alguns casos particulares de funções polinomiais de grande interesse para aplicações.

2.1 Função Afim

Definição 2.2. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma função afim quando existem constantes $a,\ b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ou seja, quando f for uma função polinomial de grau 1 ou 0.

Exemplo 2.1.1. A função identidade $f(x) = x$ é uma função afim. Nesse caso tem-se $a = 1$ e $b = 0$. Também são afins as **translações** $f(x) = x + b$.

Exemplo 2.1.2. Outros casos particulares de funções afins são as funções **lineares** $f(x) = ax$ ($a \neq 0$ e $b = 0$) e as funções **constantes** $f(x) = b$ ($a = 0$ e $b \neq 0$).

Exemplo 2.1.3. Um exemplo clássico de aplicação das funções afim é a determinação do preço a pagar por uma corrida de táxi. Para tanto, considere x a distância percorrida (usualmente medida em km), o valor inicial b (bandeirada) e o coeficiente a é o preço de cada km rodado (taxa). Assim, tem-se que o preço a ser pago pela corrida será $f(x) = ax + b$.

Exemplo 2.1.4. Em Física, a equação horária do movimento unidimensional com velocidade constante (movimento retilíneo uniforme), que descreve a posição de um objeto em função do tempo, é uma função afim. Se um objeto se move com velocidade v, sua posição em relação ao tempo será $s(t) = s_0 + vt$.

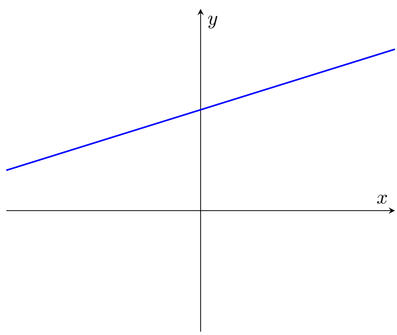
É possível, mediante critérios como os que apresentaremos mais adiante, saber que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. Antes, vejamos o gráfico de uma função afim.

Considerando a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+b$, P_1, P_2 e P_3 pontos quaisquer do gráfico de f e a noção de distância no plano, é fácil ver que tais pontos verificam

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3),$$

isto é, supondo $d(P_1, P_3)$ o maior dos três números, tem-se que P_1, P_2 e P_3 são colineares. Isso mostra diretamente que o gráfico de f é uma reta.

Figura 2.2: Gráfico da função afim $y = ax + b$.



Como consequência:

(i) Para que uma função afim f fique inteiramente determinada basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$. Isto porque o gráfico de f é uma linha reta e, como sabemos, uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos.

(ii) Do ponto de vista geométrico, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo OY . O número a chama-se a inclinação, ou coeficiente angular, dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX).

(iii) Quanto maior o valor de a, mais a reta se afasta da posição horizontal.

Dada uma função afim $f(x) = ax + b$, o coeficiente a é denominado **coeficiente angular ou declividade** da reta representada no plano cartesiano. Além disso, dados $x_1 \neq x_2$ vale

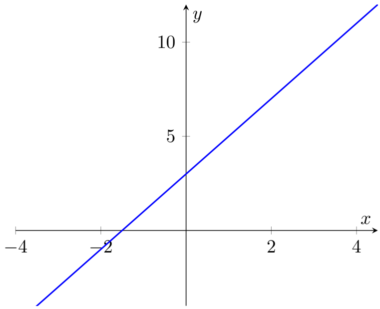
$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

O coeficiente b é denominado **coeficiente linear**. Além disso,

$$b = f(0).$$

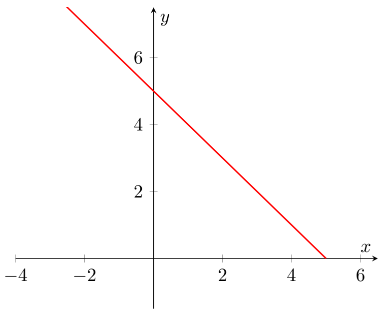
Exemplo 2.1.5. Para a função afim $f(x) = 2x + 3$, temos $a = 2 > 0$ e $b = 3$. Assim, a reta tem inclinação positiva (ângulo entre a reta e o eixo-x menor do que $\pi/2$), e corta o eixo-y no ponto $y = 3$.

Figura 2.3: Gráfico da função afim $y = 2x + 3$.



Exemplo 2.1.6. Por sua vez, para $f(x) = -x+5$, vale $a = -1 < 0$ e $b = 5$. Ou seja, a reta tem inclinação negativa (ângulo entre a reta e o eixo-x maior do que $\pi/2$ e menor do que π), e corta o eixo-y no ponto $y = 5$.

Figura 2.4: Gráfico da função afim $y = -x + 5$.



Note que para $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$,

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{a},$$

ou seja, o zero da função afim é dado por $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

Teorema 2.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim, i.e., $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

- $a > 0$ se, e somente se, f é monótona crescente.
- $a < 0$ se, e somente se, f é monótona decrescente.

Tal resultado segue diretamente da expressão

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\,.$$

Em particular, se $a \neq 0$ temos que toda função afim é **injetiva**. Além disso, para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim, vale ainda $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, i. e., se $a \neq 0$ toda função afim é **sobrejetiva**. Portanto, é também bijeção e, consequentemente, possui uma **função inversa**. De fato,

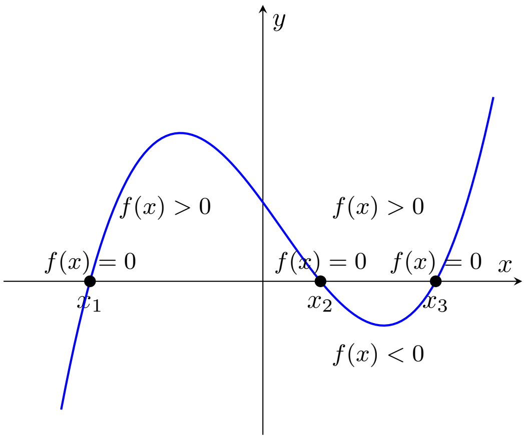
$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a},\ x \in \mathbb{R}.$$

Note que f^{-1} também é uma função afim!

Dada uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de grande interesse identificar os valores $x \in X$ tais que $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ (zeros de f) ou $f(x) < 0$. Resolver este problema significa **estudar o**

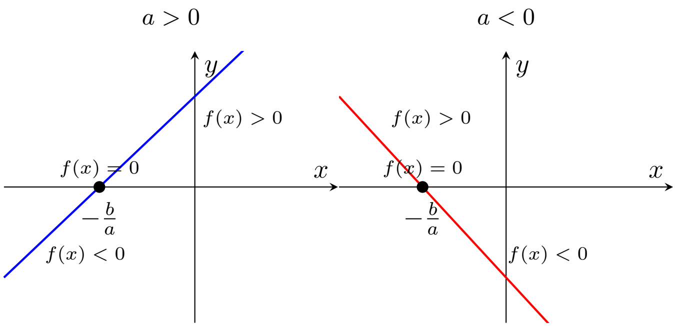
sinal da função f.

Figura 2.5: Estudo do sinal de uma função f.



Para a função afim $f(x) = ax + b$, já vimos que $x = -\dfrac{b}{a}$ é o seu único zero, $a \neq 0$. Se $a > 0$ é imediato que f será monótona crescente e dessa forma para valores $x > -\dfrac{b}{a}$ ocorre $ax + b > 0$. Já para $x < -\dfrac{b}{a}$ ocorre $ax + b < 0$. Resultado análogo ocorre para o caso $a < 0$, onde nesse caso f será monótona decrescente.

Figura 2.6: Estudo do sinal da função afim.



Exemplo 2.1.7. Considere a função dada por $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Temos que $f(x) = 0$ se, e somente se, $x = -\dfrac{1}{2}$. Desde que $a = 2 > 0$, temos

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

e

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2},$$

pois f é crescente.

Exemplo 2.1.8. Considere a função dada por $f(x) = -2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Temos que $f(x) = 0$ se, e somente se, $x = \dfrac{3}{2}$. Desde que $a = -2 < 0$, temos

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

e

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2},$$

pois f é decrescente.

2.2 Função Linear

A função linear, dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas de **proporcionalidade**.

Definição 2.3. Diremos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma proporcionalidade direta se, para quaisquer números reais c e x, tem-se

$$f(cx) = cf(x).$$

Se

$$f(cx) = \frac{f(x)}{c},$$

para quaisquer $c \neq 0$ e $x \neq 0$, diremos que f é uma proporcionalidade inversa.

Ou seja, duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando ao multiplicar uma delas por um número real **arbitrário** c, a outra também fica multiplicada por este número.

$$x \mapsto y \Rightarrow cx \mapsto cy.$$

Da mesma forma, duas grandezas são inversamente proporcionais quando ao multiplicar uma delas por um número real **arbitrário**

$c \neq 0$, a outra fica multiplicada por $\dfrac{1}{c}$ (isto é, dividida por c).

$$x \mapsto y \Rightarrow cx \mapsto \frac{y}{c}.$$

Note que ao se falar em proporcionalidade entre duas grandezas x e y, é necessário que exista uma relação funcional entre tais grandezas! Além disso, com base na definição acima, fazendo $x = 1$ e $a := f(1)$ vale

$$f(c) = c \cdot f(1) = ac, \ \forall\, c \in \mathbb{R} \text{ (proporc. direta)}$$

ou

$$f(c) = \frac{f(1)}{c} = \frac{a}{c}, \ \forall\, c \in \mathbb{R}^* \text{ (proporc. inversa).}$$

Ou seja, $f(x) = ax$ ou $f(x) = \dfrac{a}{x}$.

Fixaremos nossa atenção na proporcionalidade direta, chamada apenas de "**proporcionalidade**". Tal conceito é essencial para entender a conhecida "**Regra de Três**". Quando a correspondência $x \mapsto y$, $x^{'} \mapsto y^{'}$ é uma proporcionalidade, a igualdade $\dfrac{y^{'}}{x^{'}} = \dfrac{y}{x}$ permite que se determine um desses quatro números quando se conhecem os outros três.

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y \\ & \times & \\ x^{'} & \longrightarrow & y^{'} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y^{'} = x^{'} \cdot y \Leftrightarrow \frac{y^{'}}{x^{'}} = \frac{y}{x}.$$

Nesse contexto a grande questão é como ter certeza de que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade. Para tanto, considere as situações do exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.1.

1. **Situação 1:** Uma quantia de R$ 10.000,00 aplicada na poupança por um certo período rendeu R$ 820,00. Qual será o rendimento se a quantia aplicada for R$ 15.000,00?

2. **Situação 2:** Uma quantia aplicada na poupança por 3 meses rendeu R$ 150,00. Qual será o rendimento se o período de aplicação for de 5 meses? (considere a taxa de juros constante)

3. **Situação 3:** Uma bola em queda livre percorre 125 m em 5 segundos. Quanto ela percorre em 10 segundos?

4. **Situação 4:** Uma empresa asfaltou uma estrada de 36 km em 14 dias. Em quantos dias ela asfalta uma estrada de 54km?

Em todas as situações acima, temos uma relação funcional crescente. Mas isso não é suficiente para assegurar que temos uma proporcionalidade envolvida. Para a primeira situação acima, note que mantido o mesmo período, se duplicar, triplicar ou, em geral, multiplicar por qualquer $n \in \mathbb{N}$ o valor inicial, o rendimento será também multiplicado pelo mesmo n. O mesmo ocorre na quarta situação. Assim, essas duas estabelecem uma proporcionalidade, e desse modo podemos usar a Regra de Três para resolver o problema. Nas situações 2 e 3 isso não é possível, pois a relação envolvida não é de proporcionalidade. De fato, na situação 2, compare o rendimento em 3 e 6 meses. No segundo período de 3 meses (meses 4, 5 e 6) o rendimento será em função do valor original somado com 150 de rendimento dos primeiros 3 meses. Assim, não será o dobro. Para a situação 3, compare o deslocamento em 5 e 10 segundos. No primeiro período a bola parte do repouso e no segundo período a bola "parte" com a velocidade adquirida do movimento anterior. Assim, o deslocamento também não será o dobro.

O raciocínio acima é baseado no seguinte resultado:

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)**.** Sejam x e y grandezas positivas relacionadas por uma função f (isto é, $y = f(x)$). Suponha que:

1. f é crescente ou decrescente;

2. $f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, x e y são (diretamente) proporcionais.

Ou mais formalmente, considere $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais positivos.

Teorema 2.3. Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) uma função crescente ou decrescente. As seguintes afirmações **são equivalentes**:

1. $f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{Z}$) e todo $x \in \mathbb{R}_+$ ($x \in \mathbb{R}$);

2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$ ($x \in \mathbb{R}$);

3. $f(x+y) = f(x)+f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Os teoremas acima são a chave para determinar, em todas as situações, se estamos ou não lidando com uma proporcionalidade. Ou seja, se uma dada função é ou não linear. Se queremos saber se $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é uma função linear basta verificar duas coisas.

(i) Primeira: f deve ser crescente ou decrescente. (Estamos deixando de lado o caso trivial de f ser identicamente nula.)

(ii) Segunda: $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$ e todo $n \in \mathbb{N}$. No caso de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, basta verificar esta última condição para $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Uma consequência direta da caracterização acima para funções lineares, é a caracterização das funções afim.

Teorema 2.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva. Se o valor do acréscimo

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$$

depender apenas de h, então f é uma função afim.

Demonstração. A demonstração deste teorema é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Note que, supondo f crescente, temos φ também crescente. Além disso,

$$\begin{aligned}
\varphi(h+k) = &\ f(x+h+k) - f(x) \\
= &\ f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) \\
= &\ \varphi(h) + \varphi(k).
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(h) = ah$, com $a = \varphi(1)$. Pondo $b = f(0)$, temos $f(h) = ah + b$. ■

Dito de outra forma, o teorema acima assegura que aumentos iguais dados a x correspondem aumentos iguais de $y = f(x)$. Ou seja, a função afim possui uma **taxa de variação constante**:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a.$$

Observação 2.3. A recíproca do Teorema acima também é verdadeira.

2.3 Função Quadrática

Definição 2.4. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **quadrática** quando existem $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, quando f é uma função polinomial de grau 2.

Inicialmente, note que as constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ acima são univocamente determinados. Ou seja, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. De fato, para $x = 0$ segue que $c = c'$. Logo, considerando $x \neq 0$ e usando a Lei do cancelamento obtemos $ax + b = a'x + b'$. Fixando-se $x = 1$ e depois $x = -1$, temos $a = a'$ e $b = b'$.

Observação 2.4. O resultado acima permite estabelecer uma correspondência bijetiva entre as funções quadráticas e os trinômios do segundo grau (polinômios de grau 2).

$$f(x) = ax^2 + bx + c \longmapsto \; aX^2 + bX + c \approx \; (a, b, c)$$

O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau.

Exemplo 2.3.1. Em textos cuneiformes (Babilônia, há quase quatro mil anos), encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números, dados sua soma s e seu produto p. Em termos geométricos, este problema pede que se determinem os lados de um retângulo conhecendo o semi-perímetro s e a área p.

$$\begin{cases} x + y = s \\ x \cdot y = p \end{cases}$$

Ou seja,

$$y = s - x \Rightarrow x \cdot (s - x) = p \Rightarrow x^2 - sx + p = 0.$$

Note que $y = s - x$ também é uma solução da equação acima.

Exemplo 2.3.2. A função quadrática também surge em Física nos problemas relacionados ao movimento unidimensional com aceleração constante (movimento uniformemente variado). Sendo a aceleração é constante, $a(t) = a$ para todo $t > 0$, podemos deduzir a equação horária do espaço: $s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, com s_0 e v_0 sendo, respectivamente, a posição e a velocidade inicial.

Uma caracterização importante das funções quadráticas é a sua conhecida **forma canônica**. Para tanto, considere o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Comparando com $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ e "completando quadrado", temos

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Esta maneira de escrever o trinômio do segundo grau é chamada de forma canônica e tem algumas consequências para a função quadrática. Por exemplo:

- Identificação dos zeros;
- Valores máximo/mínimo globais;
- Não injetividade da função quadrática;
- O gráfico é uma parábola;
- Estudo do sinal.

De fato, para calcular os zeros de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ temos que resolver a equação $f(x) = 0$. Considerando a forma canônica acima,

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

A passagem da linha (2) para a linha (3) só tem sentido quando o discriminante, $\Delta := b^2 - 4ac$, é não-negativo. O caso $\Delta < 0$ a equação dada não possui solução real. Assim, considerando $\Delta = b^2 - 4ac$ e a equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

tem-se:

1. $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;

2. $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$;

3. $\Delta < 0 \Rightarrow$ Não existem raízes reais.

Para determinar os extremos globais, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 2.5.

(i) Se $a < 0$, a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$;

(ii) Se $a > 0$, a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

Para a construção do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, deve-se observar:

(a) O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = -\dfrac{b}{2a}$, perpendicular ao eixo-x

(b) Analisar a concavidade: $a > 0$ ou $a < 0$;

(c) Analisar os zeros (interseção ou não com o eixo-x): $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$;

(d) Vértice da parábola (máximo/ mínimo).

Por sua vez, para o estudo do sinal da função quadrática considere a sua forma canônica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right].$$

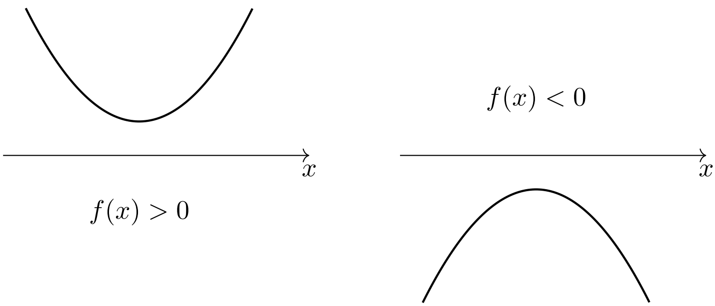
Devemos analisar o sinal de $a \neq 0$ e do discriminante Δ.

- **CASO 1:** $\Delta < 0 \Rightarrow$. Nesse caso, é suficiente analisar o sinal do produto

$$a \cdot f(x) = a^2 \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right].$$

  Para $\Delta < 0$, temos $a \cdot f(x) > 0$. Ou seja, o sinal de $f(x)$ será o mesmo sinal de a para todo $x \in \mathbb{R}$.

Figura 2.7: Estudo do sinal para o caso $\Delta < 0$.



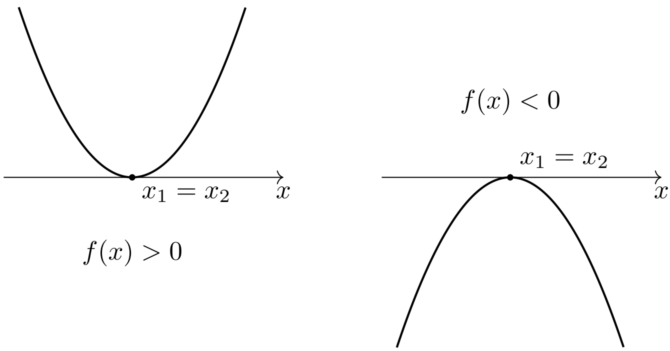
Exemplo 2.3.3. Para $f(x) = x^2 + 1$ temos $\Delta = -4 < 0$. Assim, como $a = 1 > 0$, vale $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.4. Considere $f(x) = -x^2 + x - 1$. Então, $\Delta = -3 < 0$. Como $a = -1$, segue que $-x^2 + x - 1 < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- **CASO 2:** $\Delta = 0$. Dessa forma, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, sendo $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ raiz com multiplicidade 2 de $f(x)$, pois

$$a \cdot f(x) = a^2 \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0.$$

Figura 2.8: Estudo do sinal para o caso $\Delta = 0$.



Exemplo 2.3.5. Seja $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Então, $\Delta = 0$. Como $a = 1 > 0$, segue que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mais precisamente,

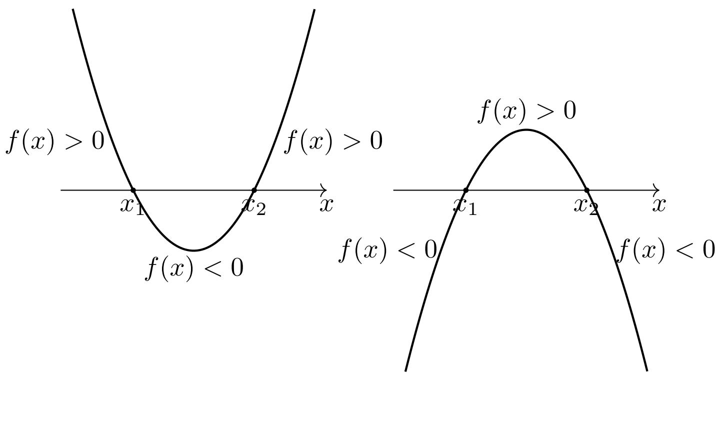
$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ f(x) = 0, & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

- **CASO 3:** $\Delta > 0$. Nesse caso, é necessário analisar o sinal do produto $a \cdot f(x) = a^2 \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, considerando por simplicidade $x_1 < x_2$. Assim, o sinal das diferenças $x - x_i$, $i = 1, 2$, e consequentemente de $a \cdot f(x)$, é determinado conforme $x < x_1 < x_2$ ou $x_1 < x < x_2$ ou $x_1 < x_2 < x$. Segue que

$$\begin{cases} a \cdot f(x) > 0, & \text{se } x < x_1 \text{ ou } x > x_2, \\ a \cdot f(x) < 0, & \text{se } x_1 < x < x_2. \end{cases}$$

Ou seja, o sinal de $f(x)$ será o sinal de a para todo x, se $x < x_1$ ou $x > x_2$, e será o sinal de $-a$ para todo x, se $x_1 < x < x_2$.

Figura 2.9: Estudo do sinal para o caso $\Delta > 0$.



Exemplo 2.3.6. Se $f(x) = x^2 - x - 6$, então $a = 1 > 0$, $\Delta = 25 > 0$, $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$. Segue que $x^2 - x - 6 > 0$ se $x < -2$ ou $x > 3$, e $x^2 - x - 6 < 0$ se $-2 < x < 3$.

Com base no estudo acima é possível resolver diversas inequações/desigualdades envolvendo funções quadráticas.

2.4 Exercícios de Fixação

1. Estima-se que, t meses a partir de agora, a população de uma certa comunidade será de $P(t) = 20t + 8000$.

   a) Qual a taxa média que a população estará variando em relação ao tempo, 15 meses a partir de agora?
   b) Por quanto a população variará realmente durante o $16^{\underline{o}}$ mês?

2. Construa o gráfico das funções lineares abaixo:

   (a) $y = -3x + 1$ (b) $y = \dfrac{x}{6} - 2$ (c) $y = 6$
   (d) $y = \dfrac{x}{2}$

3. Uma função linear $Q = Q(t)$ assume o valor $Q_1 = 88,3$ mg, no instante em que $t_1 = 14$ s e o valor $Q_2 = 89,6$ mg, quando $t_2 = 39$ s. Determinar a função linear.

4. Se uma mola helicoidal for distendida sob a influencia de uma força, seu comprimento será uma função linear

da força, a menos que a força exceda um certo limite (lei de Hooke). Seja F a força (medida em Newtons), e l o comprimento da mola (em cm). Se l_0 representa o comprimento inicial quando nenhuma força está atuando na mola e a a taxa de aumento do comprimento da mola, exprimir l em função de F.

5. O lixo sólido gerado a cada ano nas cidades dos EUA está crescendo. O lixo sólido gerado, em milhões de toneladas, foi de 88,1 em 1960, e de 234 em 2000. A tendência mostra-se linear durante este tempo.

   a) Construa uma fórmula para a quantidade de lixo sólido gerado nos EUA.
   b) Use está fórmula para prever a quantidade de lixo sólido gerado nos EUA, em milhões de toneladas, no ano de 2020.

6. Desde o início do mês, o reservatório de água de uma cidade vem perdendo água a uma taxa média constante. No dia 12, o reservatório está com 200 milhões de litros d'água e no dia 21, está com 164 milhões de litros d'água.

   (a) Expresse a quantidade de água no reservatório em função do tempo e desenhe o gráfico associado.
   (b) Quanta água havia no reservatório no dia 8?

7. Sejam A, B, C constantes com $A \neq 0$ e $B \neq 0$. Considere a equação
$$Ax + By = C.$$

Isolando y na equação acima mostre que $y = f(x)$ é uma função linear. Determine a inclinação e as interseções de f com os eixos coordenados.

8. É sabido que 100g de soja seca contém 35g de proteínas e que 100g de lentilha seca contem 26g de proteína. Homens de estatura média, vivendo em clima moderado, necessitam de 70g de proteínas na sua alimentação diária. Suponhamos que um homem queira adquirir estas 70g de proteínas alimentando-se de soja e/ou lentilhas. Seja x a quantidade diária de soja e y a quantidade diária de lentilhas (x e y medidos em unidades de 100g). Qual a relação entre x e y?

9. A pressão exercida pela água é proporcional à profundidade onde é medida. Seja d a profundidade (em metros) e p a pressão (em atm). Foram feitas as seguintes medidas na água do mar: $d = 98,0$ m, $p = 10,21$ atm. Expressar p em termos de d.

10. Escreva na forma canônica os seguintes trinômios:

    a) $x^2 - 3x + 2$
    b) $x^2 - x - 2$
    c) $x^2 - 2x + 1$
    d) $x^2 - 6x + 9$
    e) $2x^2 - 3x$
    f) $3x^2 + x - 2$

11. Determine as raízes da função polinomial $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

12. Construa o gráfico da função $g(x) = x^3 - 4x + 2$.

13. Para a função $h(x) = -x^2 + 4x - 3$, encontre os pontos de máximo e mínimo.

14. Encontre as raízes e desenhe o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$.

15. Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-a na forma canônica. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo ou máximo.

    a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$
    b) $f(x) = 8x - 2x^2$
    c) $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$
    d) $f(x) = 2x - x^2 - 3$

16. Estude a função quadrática $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ quanto ao sinal. Ou seja, determine os valores de x para os quais $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

17. Resolva as inequações.
    a) $x^2 - 3x + 2 < 0$
    b) $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$
    c) $x^2 - 3x > 0$
    d) $x^2 - 9 < 0$
    e) $x^2 - x - 2 \geqslant 0$

f) $3x^2 + x - 2 > 0$
g) $x^2 - 4x + 4 > 0$
h) $3x^2 - x \leqslant 0$
i) $4x^2 - 4x + 1 < 0$
j) $4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$

18. Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

19. As emissões de chumbo são uma das principais causas da poluição do ar nos Estados Unidos. Usando dados colhidos pela U. S. Environmental Protection Agency na década de 1990, é possível mostrar que a expressão

$$N(t) = -35t^2 + 299t + 3347$$

fornece aproximadamente a emissão total N de chumbo (em milhares de toneladas) ocorrida nos Estados Unidos t anos após o ano base de 1990.

(a) De acordo com esta expressão, qual deveria ter sido o emissão de chumbo em 1995?

(b) De acordo com esta expressão, em que ano da década de 1990 e 2000 a poluição de chumbo foi maior?

20. A concentração de bactérias num sistema de água público tem aumentado, o que ocasionou um tratamento com agentes anti-bacterianos. Bioquímicos responsáveis pelo

tratamento da água estimam que o número de bactérias por cm^3 pode ser descrito pela função

$$N(t) = 40t^2 - 320t + 1000,$$

onde t é o tempo em dias de tratamento. A água é considerada imprópria para o consumo quando a concentração de bactérias excede 720 bactérias por cm^3. Quanto tempo após o início do tratamento a água poderá ser bebida novamente?

21. Em uma determinada cidade, decide-se construir um parque isolando-se uma área na margem de um rio. São distribuídos recursos para construir 80 metros de cerca. A área fechada será um retângulo, mas apenas três lados serão fechados com cerca - o outro lado será limitado pelo rio.

    (a) Esboce a área cercada.

    (b) Qual a área máxima que pode ser fechada desta forma?

22. Quando fatores ambientais impõem um limite superior ao número de indivíduos, uma população cresce a uma taxa que é conjuntamente proporcional ao número de indivíduos e à diferença entre o limite superior e o número de indivíduos. Expresse a taxa de aumento da população em função do tamanho da população. Quando tal taxa de aumento é máxima?

CAPÍTULO 3

Funções Exponenciais e Logarítmicas

As funções exponenciais, assim como as funções afins, possuem forte relação com problemas envolvendo taxa de variação de uma grandeza em relação a outra. Entretanto, diferentemente da função afim, tal taxa não será constante. Fixada a variável independente h e uma função exponencial f, a variação correspondente da variável dependente $f(x+h) - f(x)$ é proporcional ao valor da própria variável dependente $f(x)$ (**crescimento exponencial**), sendo a constante de proporcionalidade dependente de h. Ou seja,

$$\frac{f(x+h)}{f(x)},$$

depende apenas de h, e não de x. Uma referência clássica e introdutória no tema, pode ser obtida na referência (IEZZI;

DOLCE; MURAKAMI, 2013).

Exemplo 3.0.1. Um exemplo clássico é o da desintegração radioativa. Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio e o urânio, por exemplo), tendem a se desintegrar, emitindo partículas e transformando-se em outra substância. Com o passar do tempo, a quantidade da substância original diminui. Isto ocorre de tal modo que, em cada instante, a quantidade de matéria que está desintegrando naquele momento (taxa de desintegração), é proporcional à massa da substância original que ainda resta. Ou seja, se designarmos por $m = m(t)$ a massa da substância radioativa presente no corpo no instante t, temos que m é uma função monótona injetiva (decrescente) de t e $m(t+h) - m(t) = g(h)m(t)$, ou ainda,

$$\frac{m(t+h)}{m(t)} = G(h).$$

Assim, a perda relativa ocorrida após o decurso do tempo h, depende apenas de h e não do instante inicial t. Veremos que as únicas funções com essas propriedades são as do tipo:

$$m(t) = ba^t \text{ (no exemplo acima tem-se ainda } 0 < a < 1).$$

Seja a um número real positivo diferente de 1.

Definição 3.1. A **função exponencial** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de base a, é a **única** função que satisfaz as seguintes propriedades fundamentais:

(E1) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$;

(E2) $f(1) = a$;

(E3) Se $x < y$, então $\begin{cases} f(x) < f(y), & \text{quando } a > 1 \\ f(x) > f(y), & \text{quando } 0 < a < 1. \end{cases}$

Devido a $(E1)$ e $(E2)$, f não pode assumir o valor 0: Se, por absurdo, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Isso é uma contradição com fato de $f(1) = a \neq 0$. Mais ainda:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, diante das propriedades $(E1)$ e $(E2)$, o contradomínio de f pode ser considerado apenas os números reais positivos: $\mathbb{R}_+^*$. A vantagem disso é que a função f será **sobrejetora** (a demonstração depende de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral). Com base nas propriedades $(E1) - (E3)$ e com um argumento similar ao apresentado para "Potências de Expoente Real" anteriormente, conclui-se que

$$f(x) = a^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como exemplo, considere $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(1) = [f(1)]^n = a^n.$$

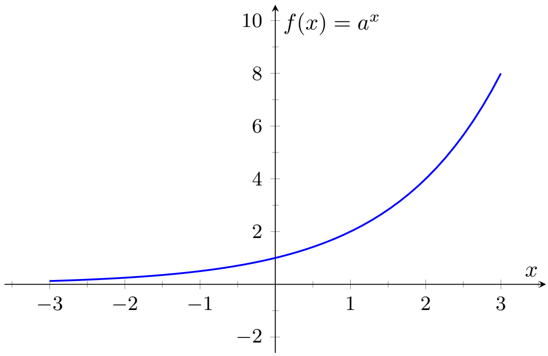
Os demais casos seguem como acima.

Resumimos a seguir algumas das principais propriedades da função exponencial:

1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$ é não limitada superiormente;

2. O gráfico da função exponencial, $f(x) = a^x$, é uma curva contínua no plano;

Figura 3.1: Gráfico da função exponencial.



3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$ é injetora. Ou seja, $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ (argumento base para resolver equações);

4. Além disso, $f(x) = a^x$ é sobrejetora, logo uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$. Consequentemente, possui uma função inversa $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Fixa-se $g := \log_a$ (**Notação**) e, assim,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Ou seja, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Tem-se ainda

$$a^{\log_a x} = x \ e \ \log_a(a^y) = y.$$

Quando $a = e \approx 2,72$, denota-se

$$\log_e x := \ln x \text{ (Logaritmo Natural).}$$

As principais propriedades dos logaritmos são:

1. $\log_a 1 = 0$;
2. $\log_a a = 1$;
3. $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$;
4. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$;
5. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$;
6. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, para quaisquer $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;
7. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (mudança de base);
8. $g(x) = \log_a x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Exemplo 3.0.2. Resolva a equação $2^x = 64$.

Solução: Desde que $64 = 2^6$, tem-se

$$2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6,$$

pois a função exponencial é injetora.

Exemplo 3.0.3. Idem para $2^{3x-1} = 32$.

Solução: Como $32 = 2^5$,

$$2^{3x-1} = 2^5 \Rightarrow 3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2.$$

Exemplo 3.0.4. Resolva a inequação $7^{5x-6} < 1$.

Solução: Sabemos que $\log_7 1 = 0$ e que a função logarítmica de base $a > 1$ é crescente. Assim,

$$7^{5x-6} < 1 \Rightarrow 5x - 6 < 0 \Rightarrow x < \frac{6}{5}.$$

Logo, o conjunto solução da inequação em questão será o intervalo $S = \left(-\infty, \dfrac{6}{5}\right)$.

Exemplo 3.0.5. Resolva a equação $3^x = \dfrac{1}{2}$. Usando as propriedades da função logarítmica, temos

$$3^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_3 1 - \log_3 2 = -\log_3 2 \approx -0{,}631.$$

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os nove primeiros anos do ensino básico (por ex., problemas envolvendo proporcionalidade, equações, inequações, ...), enquanto funções quadráticas e exponenciais aparecem nos três últimos anos (por ex., equações, inequações, progressões geométricas, matemática financeira, ...). Uma vez deduzido que o modelo adequado para um determinado problema é uma função afim, quadrática ou exponencial, o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades. A grande questão é como deduzir qual a função matemática apropriada para o problema em estudo. Por isso as caracterizações apresentadas anteriormente, e a seguir, são de grande importância.

Teorema 3.1 (Funções Exponenciais)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = [f(x)]^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $a = f(1)$;
3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, isto é, transforma soma em produto.

Teorema 3.2 (Funções Tipo Exponencial)**.** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva. Suponha que, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, o acréscimo relativo $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para a função logarítmica, temos

Teorema 3.3. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $g(xy) = g(x)+g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Então existe $a > 0$ tal que $g(x) = \log_a x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

A demonstração destes teoremas podem ser obtidas nas referências (APOSTOL, 1991), ou ainda (LIMA, 2014).

Exemplo 3.0.6. A lei de desintegração do elemento Rádio no tempo $t > 0$ é dada por $M(t) = Ce^{kt}$, onde $M(t)$ é a quantidade de Rádio no tempo t, C e k são constantes positivas. Se a metade da quantidade inicial $M(0)$ se desintegra em 1600 anos, qual é a quantidade desintegrada em 100 anos?

Solução: Sabendo que a metade da quantidade inicial se desintegra em 1600 anos,

$$M(1600) = \frac{C}{2} \Rightarrow Ce^{1600k} = \frac{C}{2} \Rightarrow e^{1600k} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1600k = \ln\left(\frac{1}{2}\right),$$

ou seja,

$$1600k = -\ln 2 \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

Assim, a quantidade restante após 100 anos será

$$M(100) = Ce^{100k} = C \cdot 2^{-100/1600} = C \cdot 2^{-1/16}.$$

Com isso, a quantidade desintegrada é:

$$\Delta M = M(100) - M(0) = C \cdot 2^{-1/16} - C,$$

isto é,

$$\Delta M = C\left(2^{-1/16} - 1\right) \approx 0{,}9576 - 1 \approx -0{,}0424.$$

Portanto, aproximadamente 4,24% da massa inicial se desintegrou após 100 anos.

3.1 Exercícios de Fixação

1. Determine o valor de $f(x) = 2^x$ para $x = -1, 0, 1$.

2. Calcule $\log_2(8)$ e $\log_{10}(1000)$.

3. Se $f(x) = e^x$, calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f(-1)$.

4. Verifique se a função $g(x) = \log_3(x)$ é crescente ou decrescente.

5. Calcule um valor aproximado para 2^π e 2^e.

6. Esboce os gráficos das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo:

    a) $f(x) = 2^x$
    b) $f(x) = 2^{-x}$
    c) $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

d) $f(x) = 2^{x^2}$

e) $f(x) = 2^{-x^2}$

f) $f(x) = 2^{1-x^2}$

g) $f(x) = 2^x - 3$

h) $f(x) = 3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

7. Sabendo-se que os gráficos das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = x^2 - 1$ se intersectam em um ponto de abscissa 3, determine o número a.

8. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$

b) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

c) $2^x = \dfrac{1}{16}$

d) $8^x = 0,25$

e) $2^{3x-1} = 32$

f) $11^{2x+5} = 1$

g) $81^{1-3x} = 27$

h) $4^{x^2-1} = 8^x$

i) $(2^x)^{x-1} = 4$

j) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$

9. Resolva a equação exponencial

$$2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120\,.$$

10. De forma similar, resolva as equações exponenciais:

    a) $4^x - 2^x = 56$

    b) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

    c) $9^x + 3^x = 90$

    d) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

11. Resolva o sistema de equações $\begin{cases} 4^x = 16y \\ 2^{x+1} = 4y. \end{cases}$

12. Para que valores reais de m a equação $4^x - (m-2) \cdot 2^x + 2m + 1 = 0$ admite pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

13. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

    a) $2^x > 128$

    b) $3^{2x+3} > 243$

    c) $7^{5x-6} < 1$

    d) $(0,3)^{x^2-2x-8} \geq 1$

    e) $8 < 2^x < 32$

    f) $4 < 8^{|x|} < 32$

14. Use as aproximações $\log_{10} 2 \approx 0,301$, $\log_{10} 3 \approx 0,477$ e $\log_{10} 5 \approx 0,699$ para obter valores aproximados para:

a) $\log_{10} 9$
b) $\log_{10} 40$
c) $\log_{10} 200$
d) $\log_{10} 3000$
e) $\log_{10} 0,003$
f) $\log_{10} 0,81$

15. Se $A = 5^{\log_{25} 2}$, determine o valor de A^3.

16. Determine o valor de $A \in \mathbb{R}$ tal que $4^{\log_2 A} + 2A - 2 = 0$.

17. Se $\log_a x = n$ e $\log_a y = 6n$, calcule $\sqrt[3]{x^2 y}$.

18. Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = \log_3 x$
b) $f(x) = \log_2 |x|$
c) $f(x) = |\log_2 x|$
d) $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

19. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \log_2(1 - 2x)$
b) $f(x) = \log_5 \dfrac{x+1}{1-x}$
c) $f(x) = \log_{10}(x^2 + x - 12)$
d) $f(x) = \log_{x+1}(2x^2 - 5x + 2)$

20. Resolva as seguintes equações:

a) $5^x = 4$

b) $3^x = \dfrac{1}{2}$

c) $7^{\sqrt{x}} = 2$

d) $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$

e) $2^x = 3^{x+2}$

f) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

g) $4^x + 6^x = 9^x$

h) $\log_2(3x-5) = \log_2 7$

i) $\log_5(x^2 - 3x - 10) = \log_5(2 - 2x)$

j) $\log_3(x^2 + 3x - 1) = 2$

k) $\dfrac{2 + \log_3 x}{\log_3 x} + \dfrac{\log_3 x}{1 + \log_3 x} = 2$

l) $\log_x(2x+3) = 2$

21. Resolva as inequações:

a) $\log_3(5x-2) < \log_3 4$

b) $\log_5(x^2 - x) > \log_{0,2} \dfrac{1}{6}$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 7x + 5) \leq -2$

d) $(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 > 0$

22. A população mundial em 1970 foi estimada em $3,7 \times 10^9$ pessoas. A taxa de crescimento anual é aproximadamente 2%. Admitindo-se que a taxa de crescimento permaneça constante, qual será a população mundial nos anos 1980, 1990 e 2000?

23. Biólogos afirmam, que sob condições ideais, o número de bactérias numa cultura cresce exponencialmente. Suponha que existam inicialmente 2000 bactérias em uma certa cultura e que existiram 6000 após 20 min. Quantas bactérias existirão após 1 hora?

24. Uma população de coelhos cresce exponencialmente. Num primeiro censo haviam 20 coelhos. Um ano após já haviam 50 coelhos. Obtenha uma fórmula que determine a quantidade de coelhos em função do tempo t, medido em anos.

25. Meia-vida de uma substância radioativa é o tempo para 50% de uma amostra da substância se deteriorar. Considere que a quantidade remanescente de uma certa substância radioativa, após t anos, é dada por $Q(t) = Q_0 e^{-0,003t}$. Calcule a meia-vida da substância.

26. O rádio se deteriora exponencialmente. Sua meia-vida é de 1960 anos. Quanto tempo levará para uma amostra de 50g de rádio se reduzir a 5g?

27. O carbono-14 decai exponencialmente a uma taxa constante de $0,0121\%$. Calcule a meia-vida do carbono-14.

28. Em algumas culturas, qualquer quantidade com crescimento exponencial dupicará o seu valor, ou seja, aumentará em 100%. Como sua taxa percentual de crescimento é constante, o tempo que a quantidade lavará para se duplicar é também constante. Este período de tempo é chamado de tempo de duplicação.

(a) Determine o tempo necessário para que uma população de tartarugas, descrita pela função

$$P(t) = 175 \cdot (1,145)^t$$

duplique seu tamanho inicial.

(b) Qual o tempo necessário para esta população quadruplicar seu valor inicial?

29. (UNIRIO/1994) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40(1,1)^t$, onde a altura média A é medida em centímetros e o tempo t em anos. Sabendo-se que $\log_{10} 2 = 0,30$ e $\log_{10} 11 = 1,04$, determine:

    a) a altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;

    b) a idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de $1,6$m.

30. Em algumas situações, para expressar certas grandezas, é mais conveniente empregar as chamadas escalas logarítmicas do que as escalas lineares convencionais. Este é o caso, por exemplo, da escala Richter de terremotos. Na escala Richter, a intensidade I de um terremoto, expressa em graus, é definida da seguinte forma

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

em que E representa a energia liberada pelo terremoto, medida em kWh, e $E_0 = 10^{-3} kWh$.

a) Qual é a energia liberada por um terremoto de 3 graus na escala Richter? E por um terremoto de 9 graus?

b) Qual é a relação entre a energia liberada por um terremoto de grau k e a energia liberada por um terremoto de grau $k+1$ na escala Richter?

CAPÍTULO 4

Funções Periódicas

As funções periódicas, surgem em diversos contextos do mundo real. Elas são fundamentais na descrição de fenômenos periódicos, isto é, que se repetem regularmente em intervalos de tempo constante, tais como as variações diárias na temperatura da atmosfera terrestre, batimentos cardíacos e outros ritmos biológicos, pêndulos e oscilações de ondas sonoras ou eletromagnéticas, como pode ser visto de forma básica na referência (DE LUCENA, 2020), ou ainda via transformada de Fourier, como pode ser visto em (JUNIOR, 2006).

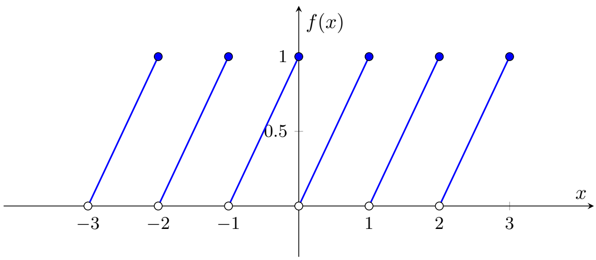
Definição 4.1. Seja $T \neq 0$. Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **periódica** de **período** T, se $f(x+T) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação 4.1. Por simplicidade, muitas vezes iremos nos referir como f, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 4.0.1. Considere a função $f(x) = x - [x]$, onde

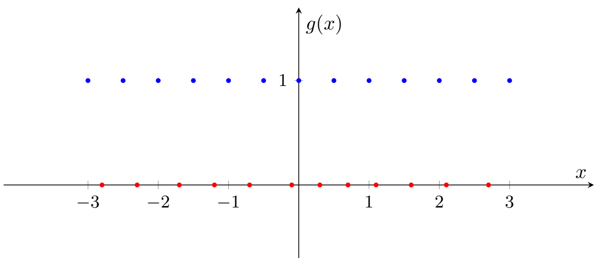
$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \ ; \ n \leq x\}$ é a função maior inteiro. Então, f é periódica de período $T = 1$, pois $[x+1] = [x] + 1$.

Figura 4.1: Gráfico da função $f(x) = x - [x]$.



Exemplo 4.0.2. Do mesmo modo, a função $g(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ é periódica de período T, para cada $T \in \mathbb{Q}$ não nulo.

Figura 4.2: Gráfico da função g.



Teorema 4.1. Sejam $T,\ c \in \mathbb{R}$ não nulos. Se f é periódica de período T, então:

- f também é periódica de período kT, para todo $k \in \mathbb{Z}$ não nulo;
- A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(cx)$, é periódica de período $\dfrac{T}{c}$.

Observação 4.2. Define-se o *período fundamental* de uma função periódica f, como o **menor período positivo** de f. É muito comum em Matemática usar apenas a expressão período para designar o período fundamental.

As funções periódicas mais conhecidas são as funções trigonométricas reais a valores reais

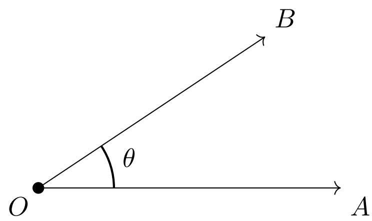
$$f(x) = \sin x, \quad \text{e} \quad g(x) = \cos x\,,$$

e suas combinações, como pode ser vista em (DE LUCENA, 2020). Dessa forma, as funções periódicas também são conhecidas como funções trigonométricas. Tais funções terão maior destaque ao longo desta seção. Antes de definirmos as funções trigonométricas, recordamos suas origens na geometria plana (triângulos e circunferência), como destacado em (IEZZI, 2013).

4.1 Triângulo Retângulo

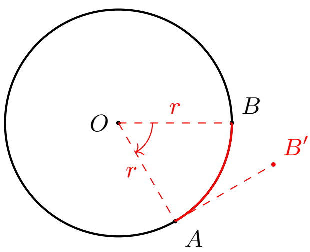
Inicialmente recorde que **ângulo** é por definição a região delimitada por duas semirretas orientadas que compartilham o mesmo ponto de origem, chamado vértice.

Figura 4.3: Ângulo $A\hat{O}B$



As unidades de medida mais comuns para ângulos são **grau**, $x°$, e o **radiano** (Sistema Internacional). Por definição, 1° corresponde a $\dfrac{1}{360}$ do comprimento da circunferência (independente do valor do raio), enquanto 1 rad corresponde a um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao raio r da circunferência (Figura 4.4).

Figura 4.4: Definição de 1 rad.



A relação entre grau e radiano é dada por:

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \longrightarrow & 2\pi \text{ rad} \\ 180^\circ & \longrightarrow & \pi \text{ rad} \end{array}.$$

Segue que

$$1 \text{ rad} \;=\; \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \;\approx\; 57,3^\circ.$$

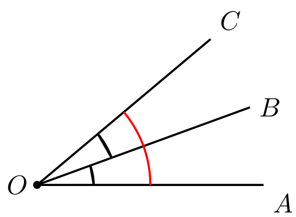
Vale destacar que a medida de um ângulo ($m(A\hat{O}B)$) é sempre um número real positivo de modo a satisfazer:

(i) ângulos congruentes tem sempre a mesma medida, e vice-versa;

(ii) dizer que um ângulo é maior do que outro significa que sua medida é maior do que a do outro;

(iii) se $m(A\hat{O}B)$ é a medida do ângulo $A\hat{O}B$ e $m(B\hat{O}C)$ é a medida do ângulo $B\hat{O}C$, então $m(A\hat{O}C) = m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C)$.

Figura 4.5: Soma de ângulos adjacentes.



Observação 4.3. Diz-se que dois ângulos são congruentes se, sobrepostos um sobre o outro, todos os seus elementos coincidem.

Observação 4.4. Um ângulo pode ainda ter uma **orientação**. Para tanto considera-se um ângulo como os ponteiros de um relógio. Nesse caso, a orientação é dita positiva se o arco gerador do ângulo foi construído no sentido anti-horário, e a orientação será dita negativa se o arco foi construído no sentido horário (sentido seguido pelos ponteiros de um relógio). Dessa forma observa-se uma outra maneira de medir ângulos em função da noção de horas (h), minutos ($x^{'}$) e segundos ($y^{''}$), conforme abaixo:

$$1^{\circ} \longrightarrow 60^{'} = 1\ h \Leftrightarrow 1^{'} \longrightarrow \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$$

e

$$1^{'} \longrightarrow 60^{''} \Leftrightarrow 1^{''} \longrightarrow \left(\frac{1}{60}\right)^{'}.$$

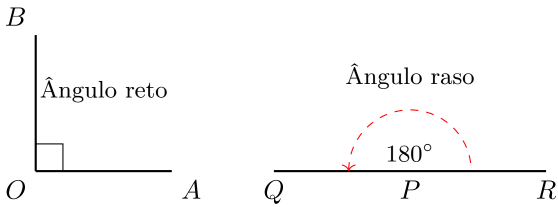
Assim, para expressar a medida do ângulo $56^{\circ}48^{'}36^{''}$ em grau procede-se da seguinte forma,

$$\begin{aligned} 56^{\circ}48^{'}36^{''} &= 56^{\circ} + 48^{'} + 36^{''} \\ &= 56^{\circ} + \left(\frac{48}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{36}{3600}\right)^{\circ} \\ &= 56,81^{\circ}, \end{aligned}$$

onde aplicamos as relações acima usando "Regra de Três"simples.

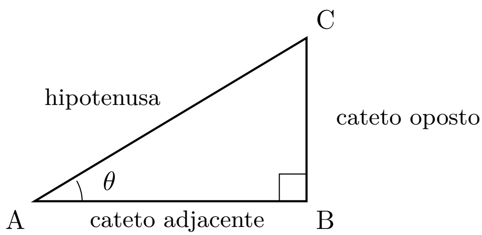
Um ângulo de 90° ou $\dfrac{\pi}{2}$ rad, é dito um **ângulo reto** e um ângulo de 180° ou π rad, é dito um **ângulo raso**.

Figura 4.6: Ângulo reto e ângulo raso.



Entende-se como um **triângulo retângulo**, uma figura plana formada por três ângulos cujos vértices não são colineares, sendo um deles um ângulo reto. Tais ângulos são entendidos como os ângulos internos da figura formada. Nesse sentido, os três segmentos gerados a partir dos vértices são ditos lados do triângulo e, mais especificamente nesse caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa** e os demais lados (adjacentes ao ângulo reto) de **catetos**.

Figura 4.7: Triângulo retângulo.



O resultado relacionado a triângulos retângulos mais conhecido é o chamado Teorema de Pitágoras, resumido a seguir:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

onde $\overline{XY}$ indica o comprimento do segmento que parte do ponto X e chega ao ponto Y.

Considerando o triângulo retângulo acima, fixando-se o ângulo $\theta = B\hat{A}C$ e tendo em vista a noção de semelhança de triângulos (proporcionalidade), define-se as **razões trigonométricas**:

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \text{(seno)},\\
\cos(\theta) &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{(cosseno)},\\
\tan(\theta) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \text{(tangente)}.
\end{aligned}$$

Note que $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Outras definições relevantes são:

$$\begin{aligned}
\cot(\theta) &= \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{(cotangente)},\\
\sec(\theta) &= \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{(secante)},\\
\csc(\theta) &= \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{(cossecante)}.
\end{aligned}$$

Como consequência do Teorema de Pitágoras, segue a chamada **Relação Fundamental da Trigonometria**:

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1.$$

Esta relação origina a seguinte tabela, que apresentamos de forma simplificada, e somente para alguns ãngulos mais usuais.

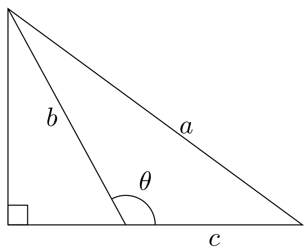
Tabela 4.1: Valores das funções trigonométricas nos arcos notáveis do $1^{\underline{o}}$ quadrante

Razão/ Ângulo	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\cot\theta$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$-$
$\csc\theta$	$-$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

Um ponto a ser destacado aqui é que as definições acima fazem sentido apenas para ângulos com medida entre $0°$ e $90°$ (ou $\pi/2$ rad). No entanto, existem muitas situações onde necessita-se calcular, por exemplo, $\cos\theta$ com $\theta \geq 90°$.

Exemplo 4.1.1. Uma situação clássica é a de calcular a medida de um dos lados de um triângulo conhecendo a medida dos outros dois lados e do ângulo formado pelos mesmos (ângulo oposto ao lado que queremos calcular). Um problema similar é o de calcular a medida de um ângulo, dado os três lados do triângulo.

Figura 4.8: Lei dos Cossenos.



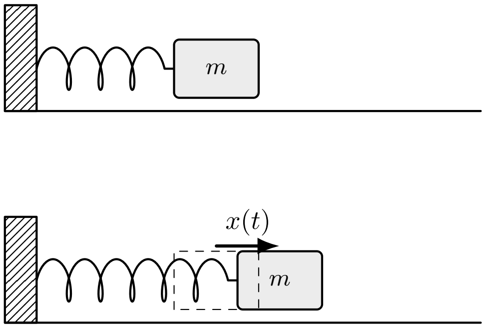
Para tais problemas tem-se a disposição a chamada **Lei dos Cossenos**:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.$$

Nesse caso, em geral, o ângulo $\theta \geq 90°$.

Exemplo 4.1.2. Importantes problemas na Física são relacionados ao estudo de materiais elásticos, oscilações e sistemas massa-mola (osciladores harmônicos). Considere a situação apresentada na figura abaixo. Nesse caso, o deslocamento da massa presa à uma mola é regido pela Lei de Hooke, que estabelece que a força aplicada é proporcional ao deslocamento $x = x(t)$,

Figura 4.9: Deslocamento de uma massa presa à uma mola.



onde $t \geq 0$ representa a variável tempo.

$$F_{\text{elástica}} = -kx,$$

onde k depende do material da mola. Usando a 2^a Lei de Newton, temos que o deslocamento satisfaz a equação diferencial

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

e portanto,

$$x = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \beta \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

com $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ constantes. Aqui novamente é necessário calcular seno e cosseno de ângulos com medidas superiores a $90°$.

Dessa forma, a seguir as razões trigonométricas serão ampliadas para um intervalo maior, a saber, de 0° a 360° (ou 2π rad), e posteriormente para qualquer valor real (funções trigonométricas).

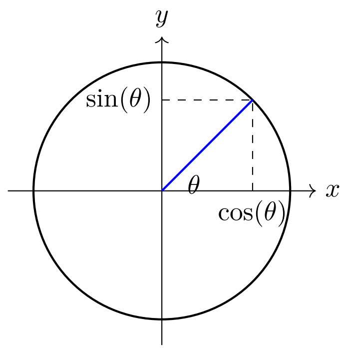
4.2 Circunferência

Considerando uma circunferência unitária (raio $r = 1$) centrada na origem do plano coordenado

$$x^2 + y^2 = 1,$$

podemos reproduzir as razões trigonométricas apresentadas no triângulo retângulo de modo a considerar ângulos maiores que 90°.

Figura 4.10: Ciclo trigonométrico.



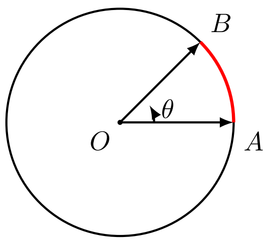
Para tanto, observe que pela relação fundamental da trigonometria,

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1\,,$$

é razoável considerar uma circunferência unitária centrada na origem. Tal relação indica que para todo ângulo θ entre $0°$ e $360°$, os números $\cos\theta$ e $\sin\theta$ são as coordenadas de um ponto da circunferência em questão. Dessa forma, considerando as projeções ortogonais de tal ponto sobre os eixos coordenados (ver figura acima), fica determinado de modo único um triângulo retângulo para o qual são aplicadas as razões trigonométricas anteriores. Tal construção define o chamado **ciclo trigonométrico**.

No círculo trigonométrico o ângulo θ passa a ser encarado como um **ângulo central** (vértice no centro da circunferência).

Figura 4.11: Ângulo central.



Isso permite estabelecer a relação entre grau e radiano via regra de três, apresentada anteriormente. No que segue considera-se apenas o radiano como unidade de medida para ângulos.

4.3 Funções Trigonométricas

Para ampliar a definição das relações trigonométricas acima para todo $\mathbb{R}$, devemos associar a cada número real t um ângulo. Isso pode ser feito através de uma função especial que faz corresponder a cada $t \in \mathbb{R}$ um ponto $(x, y) \in C$, onde C representa o ciclo trigonométrico anterior, ou seja, C representa a circunferência unitária centrada na origem do plano coordenado. Tal função $E : \mathbb{R} \to C \subset \mathbb{R}^2$, chamada **Função de Euler**, é tal que

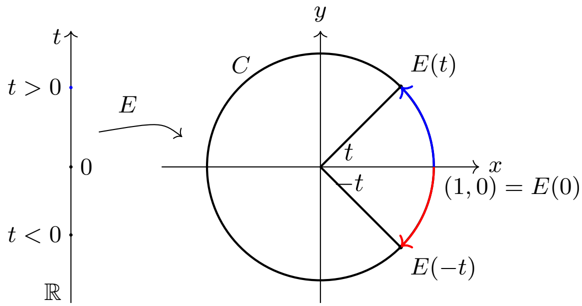
(i) $E(0) = (1, 0)$;

(ii) para $t > 0$, $E(t) = (x(t), y(t))$ será o ponto final após percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um arco de comprimento t no sentido positivo do ciclo trigonométrico (anti-horário);

(iii) para $t < 0$, $E(t) = (x(t), y(t))$ será o ponto final após percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um arco de comprimento $|t|$ no sentido negativo do ciclo trigonométrico (horário);

Ou seja, a reta real é de certa forma “curvada” sobre o ciclo trigonométrico.

Figura 4.12: Função de Euler



Considerando a função de Euler, as funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são definidas pondo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$,

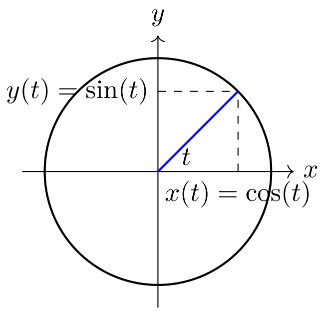
$$\begin{cases} \cos t = x(t) \\ \sin t = y(t). \end{cases}$$

Desde que $E(t) = E(t + 2k\pi)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$, temos que as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π. Aqui, $|k|$ representa o número de voltas em torno do ciclo trigonométrico, sendo o intervalo $[0, 2\pi]$ correspondente a primeira volta. Além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$ vale

$$(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1.$$

Com base na função da Euler é possível justificar todas as propriedades das funções trigonométricas, incluindo as de simetria e a paridade de tais funções.

Figura 4.13: Funções trigonométricas.

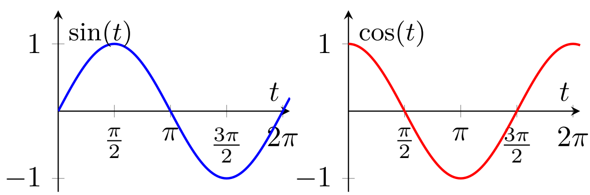


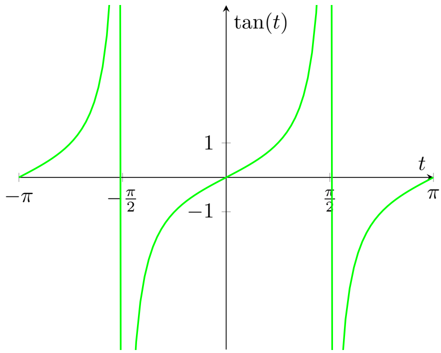
As demais funções trigonométricas são definidas combinando as funções cos e sin como antes. Em particular,

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Abaixo seguem os gráficos das funções $\sin(t)$, $\cos(t)$ e $\tan(t)$.

Figura 4.14: Gráfico das funções trigonométricas.





Note que a função seno é limitada, pois $|\sin t| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. O mesmo vale para a função cosseno. Por conta da natureza da função tangente, nos pontos $\pi/2 + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), haverão singularidades pontuais, o que justifica a representação gráfica acima.

Por fim, seguem algumas das fórmulas de adição para seno e cosseno, que são usadas para simplificar expressões e resolver equações trigonométricas:

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b),$$

e

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b).$$

Exemplo 4.3.1. Calcule $\cos(\pi/4 + \pi/6)$. De fato, usando a fórmula acima,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Substituindo os valores:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Mais detalhes sobre as fórmulas de adição podem ser encontrados nas referências (IEZZI, 2013), (CARMO, 2005) e (GUIDORIZZI, 2013).

4.4 Exercícios de Fixação

1. Determine o período da função $f(x) = \sin(2x)$.

2. Determine o período, a imagem e faça o gráfico das funções abaixo:

    a) $f(x) = 1 + 2\cos 3x,\ x \in \mathbb{R}$

    b) $g(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

3. Encontre o valor máximo e mínimo da função $g(x) = \cos(x) + 1$.

4. Determine o domínio da função $y = \tan x$.

5. Calcule $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

6. Prove as identidades:

   (a) $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = 1 - 2\sin^2 x$.

   (b) $\dfrac{\sin x}{\csc x - \cot x} = 1 + \cos x$.

   (c) $\sec x \cdot \cot x = \csc x \quad (x \neq n\pi/2)$.

   (d) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

   (e) $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$.

7. Mostre que:

   (a) $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$.

   (b) $\sin^2\theta = \dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$.

8. Determine a imagem e faça o gráfico das funções abaixo:

   (a) $f(x) = |\sin x|$.

   (b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

   (c) $f(x) = 1 + \cos x$.

9. Determine o conjunto dos números reais x para os quais $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Idem para $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

10. Determine a função inversa de $f(x) = \sin(x)$ no intervalo $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

11. Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo de 15° (ângulo formado por um ponto no topo da montanha, o observador e o plano horizontal). Após caminhar uma distância d em direção a montanha, ele passa a vê-la segundo um ângulo de 30°. Qual é a altura da montanha?

12. Considere agora que o observador do problema anterior encontrou um ângulo α na primeira medição e β na segunda medição. Determine a altura da montanha em função de α, β e d.

Referências

APOSTOL, T. M. **Calculus**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 1.

CARMO, M. P. et. all. **Trigonometria Números Complexos**. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

DE LUCENA, A. E. S. **Funções Periódicas e Quase-Periódicas**. 2020. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Campina Grande.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. [S.l.]: LTC, 2013. v. 1.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. [S.l.]: Editora Atual, São Paulo, 2013. v. 3.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. [S.l.]: Editora Atual, São Paulo, 2013. v. 2.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. [S.l.]: Editora Atual, São Paulo, 2013. v. 1.

JUNIOR, V. R. B. **Transformada de Fourier e Aplicações**. 2006. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de São Carlos.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 2014. (Coleção PROFMAT).

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. [S.l.]: Pearson/Makron, São Paulo, 1998.

Matemática para Ciências

Volume 1: Funções

EDUFDPar